PARABOLISCHE METRIK
IM
HYPERBOLISCHEN RAUM.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)
der k. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 26. Juni 1908

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

FRIEDRICH BÖHM
aus Augsburg.

ACAD. LUDWIGS-MAX. BIBL.

München 1908.
K. Hof- und Universitäts- Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548315_0070

Einleitung.

Die Grundlage aller funktionentheoretischen Untersuchungen bildet die komplexe Variable $z = x + iy$. Sie wird in bekannter Weise in der komplexen Ebene geometrisch gedeutet. Jedem Werte z wird ein und nur ein Punkt (x, y) der Ebene zugeordnet, so auch dem Werte $z = \infty$.

Es ist klar, daß man durch die gemachte Festsetzung darauf verzichtet, den Anforderungen der projektiven Geometrie: der unbeschränkten Gültigkeit der Lagenbeziehungen in dieser Ebene zu genügen. Alle Beziehungen zwischen den Gebilden der komplexen Ebene sind rein metrischer Natur, d. h. durch Strecken und Winkel auszudrücken. Wir begeben uns also von vornherein des Vorteiles der projektivischen Auffassung und Behandlung der metrischen Fragen auf Grund der beiden imaginären Kreispunkte, wenn wir nicht die Verbindung auf dem von Prof. Lindemann[1]) angegebenen Wege nachträglich herstellen wollen.

Für uns nun handelt es sich um die Frage: „Wie gestalten sich diese Verhältnisse, wenn wir die hyperbolische Maßbestimmung als allein richtig im Raume annehmen?“

oder etwas anders formuliert:

„Wie kommt der ‚nichteuklidische Mensch‘ zu einer einfachen geometrischen Deutung seiner funktionentheoretischen Untersuchungen, die er, wie selbstverständlich anzunehmen ist, genau so wie wir führen würde?“

Inwieweit freilich unsere Analysis ihre Entstehung und ihre Fortschritte der geometrischen Anschauung verdankt, ist eine andere Frage und kann vollends für den nichteuklidischen Fall nicht leicht

[1]) Cl. L. II, pag. 625.

behandelt werden. Denn daß die Überzeugung von der unbedingten Richtigkeit des Parallelenpostulates auch auf die Analysis in ihrer Entwicklung, wo immer sie mit geometrischen Fragen in mehr oder minder innigem Zusammenhang stand, mächtig eingewirkt hat, ist wohl außer Zweifel, wenn auch die Analysis ihrem Wesen nach unabhängig von jeglicher Anschauung ist.

Es soll nun unsere Aufgabe sein, Schritt für Schritt bei der Entwicklung der funktionentheoretischen Sätze stets auf die geometrischen Hilfsmittel zu achten und uns zu fragen: „gibt es etwas Analoges auch bei hyperbolischer Maßbestimmung des Raumes?“

Wir sahen:

Die analytische Grundlage ist die komplexe Variable $z = x + iy$. Es erhebt sich für den nichteuklidischen Menschen sofort die Frage:

„Wie kann ich mir eine komplexe Zahl geometrisch deuten?“

Wir pflegen eine Ebene mit einem rechtwinkligen, geradlinigen Koordinatensystem zu Grunde zu legen. In der nichteuklidischen Ebene kommen zwar auch rechte Winkel vor; doch ein rechtwinkliges, geradliniges Koordinatensystem gibt es nicht. Also können wir die n. E. nicht für unsern Zweck benutzen. Wollten wir auch vielleicht ein krummliniges orthogonales Koordinatensystem einführen, so kämen wir in Bezug auf das Unendlich-Ferne in noch größere Schwierigkeiten, als dies bei der komplexen Ebene der Fall war.

Ein so kompliziertes Verfahren zur Darstellung des Unendlich-Fernen durch einen Punkt in der n. e. Ebene ist für den n. e. Menschen unnötig, da er schon ein anderes besseres Hilfsmittel zur geometrischen Deutung seiner funktionentheoretischen Prozesse besitzt, welches noch dazu gleichmäßig den Anforderungen der projektiven Geometrie wie der Funktionentheorie genügt, nämlich seine Grenzfläche.

Der erste Teil dieser Untersuchungen soll sich mit diesem zweidimensionalen Gebilde der hyperbolischen Geometrie beschäftigen, auf welchem die parabolische Maßbestimmung gilt. Denn dieser Umstand gibt gerade Anlaß zu einer weitgehenden Analogie mit den Verhältnissen in der gewöhnlichen euklidischen Ebene und kann herangezogen werden zu einer einfachen Darstellung der komplexen Zahl und damit der funktionentheoretischen Prozesse, wie sie sonst durch die komplexe Ebene geleistet wird und diese Darstellung kann bei jedem Problem gleichzeitig projektivisch und metrisch gedeutet

werden. Wir kommen auf diesem Wege unter anderem zu einem Begriff der „Ähnlichkeit“ von Figuren (auf der Grenzfläche), während es in der n. e. Ebene keine ähnlichen Figuren gibt.

Der zweite Teil der Arbeit wendet sich einem dreidimensionalen Gebilde im vierdimensionalen hyperbolischen Raume zu, in welchem ebenfalls die parabolische Maßbestimmung gilt. Er liefert den Beweis und die nähere Ausführung des Gedankens, daß im n. e. Grenzraum dieselben Sätze gelten, wie im gewöhnlichen euklidischen Raume und zeigt, daß unsere gewöhnliche Potentialtheorie (die das Unendlich-Ferne als einen Punkt des Raumes betrachtet) auf diesem n. e. Grenzraum ihre Deutung finden würde.

Für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit sowie für die mannigfache Förderung während derselben bin ich Herrn Professor Lindemann in hohem Maße zu Dank verpflichtet.

I. Teil.

Die Grenzfläche.

Die parabolische Geometrie auf ihr und Benützung derselben als geometrische Grundlage der Funktionentheorie bei hyperbolischer Maßbestimmung des Raumes.

§ 1.

Ableitung der Grenzfläche.

Um zu dieser Grenzfläche zu gelangen, müssen wir folgendes vorausschicken:

Anschließend an die Untersuchungen, wie sie in der III. Abteilung der Vorlesungen über Geometrie gegeben werden, sei hier die dortige Ableitung kurz wiederholt.

Alle Bewegungen im Raume sind durch diejenigen linearen Transformationen des Raumes gegeben, welche die Gesamtheit der unendlich-fernen Punkte, die in unserem Falle eine reelle nichtgeradlinige Fläche zweiter Ordnung erfüllen, in sich überführen. Es kann durch diese Transformationen jede Ebene des Raumes in jede andere Ebene und jeder Punkt in jeden anderen übergeführt werden. Ein unendlich-ferner Punkt bleibt ein solcher.

Nun gibt es verschiedenartige Transformationen, welche eine Fläche zweiter Ordnung (F^2) in sich transformieren; wir können als Bewegungen nur die „eigentlichen" Transformationen betrachten und zwar von ihnen auch nur diejenigen, die mit einem imaginären Element zugleich auch das konjugiert-imaginäre Element fest lassen.

Der Fall der linearen Transformation der unendlich-fernen Fläche zweiter Ordnung (F_2^∞) in sich, der für uns in Betracht kommt, ist folgender:

Die Gleichung der F_2^∞ sei:

$$X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0 \qquad 1)$$

Während im allgemeinen eine n. e. Bewegung charakterisiert ist durch eine Rotation um eine festbleibende Axe, verbunden mit einer Verschiebung längs derselben (im ganzen also durch eine Schraubenbewegung), haben wir hier den speziellen Fall der Rotation um eine Tangente der F_2^∞, die notwendig „ideal", d. h. außerhalb der F_2^∞ gelegen ist, da diese als nicht geradlinig vorausgesetzt war.

Das (projektiv definierte) Koordinatensystem ist so gewählt, daß $X_4 = 0$ die Tangentialebene im Berührpunkt jener Rotationsaxe darstellt.

Diese Ebene enthält außer dieser Geraden, welche mit der Gesamtheit ihrer Treffgeraden als spezieller linearer Komplex aufgefaßt werden kann, und dem in Bezug auf die F_2^∞ konjugierten speziellen Komplex, der konjugierten Polaren, die beiden imaginären Erzeugenden durch den Berührpunkt, welche harmonisch zu den Polaren liegen.

Durch eben diese imaginären Erzeugenden gehen die beiden Ebenen $X_2 = 0$ $X_3 = 0$, welche konjugiert imaginär sind.

Die Tangentialebene im zweiten Schnittpunkt der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen ist $X_1 = 0$. Deshalb hat die Flächengleichung die Form 1).

Die Transformation lautet:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \Xi_1 + \Lambda(\Xi_2 + \Xi_3) - \Lambda^2 \Xi_4 \\ X_2 &= \Xi_2 - \Lambda \Xi_4 \\ X_3 &= \Xi_3 - \Lambda \Xi_4 \\ X_4 &= \Xi_4 \end{aligned}\right\} X_1 X_4 + X_2 X_3 = \Xi_1 \Xi_4 + \Xi_2 \Xi_3 \qquad I)$$

oder in reellen Koordinaten:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= (2 - \Lambda^2)\xi_1 + 2\Lambda \xi_2 + 2k\Lambda^2 \xi_4 \\ x_2 &= \Lambda \xi_1 + \xi_2 + 2k\Lambda \xi_4 \\ x_3 &= \xi_3 \\ 4k x_4 &= -\Lambda^2 \xi_1 + 2\Lambda \xi_2 + 2k(\Lambda^2 + 2)\xi_4, \end{aligned} \qquad I')$$

wodurch ebenfalls die F_2^∞, deren Gleichung jetzt die Form hat:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4k^2 x_4^2 = 0 \qquad 1')$$

in sich übergeführt wird.

Bestimmen wir die Elemente, die bei dieser Bewegung fest bleiben, so erhalten wir die Punkte der Rotationsaxe

$$X_2 + X_3 = 0 \quad X_4 = 0 \quad [x_2 = 0 \quad x_1 - 2k x_4 = 0].$$

In sich übergeführt werden außer der F_2^∞ die Ebenen des Büschels

$$\frac{X_2 - X_3}{2i} + \lambda X_4 = 0 \quad [x_3 + \lambda (x_1 - 2k x_4) = 0]. \qquad a)$$

Die Axe dieses Ebenenbüschels ist eben der konjugierte spezielle Komplex. Unter diesen Ebenen ist auch die Ebene $X_4 = 0$ $[x_1 - 2k x_4 = 0]$ enthalten.

Durch diese Transformationen werden alle unendlich-fernen Kegelschnitte (C_2^∞) dieser Ebenen und alle Kegelschnitte, welche in dem ausgezeichneten unendlich-fernen Punkt (P^∞)

$$X_2 = 0 \quad X_3 = 0 \quad X_4 = 0 \quad [x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_1 - 2k x_4 = 0]$$

mit dem C_2^∞ eine Berührung dritter Ordnung eingehen,[1]) in sich übergeführt. Jeder Punkt einer dieser Ebenen bewegt sich also auf einer solchen Grenzkurve.

Da sowohl $X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0$ als auch $X_4 = 0$ in sich übergehen, so ist dies auch der Fall mit dem Flächenbüschel

$$X_1 X_4 + X_2 X_3 + \mu X_4^2 = 0 \qquad 2)$$
$$[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4k^2 x_4 + \mu (x_1 - 2k x_4)^2 = 0].$$

Diese Flächen, welche von dem Ebenenbüschel in den erwähnten Grenzkurven geschnitten werden, sind wie alle Flächen, welche die unendlich-ferne Fläche in zwei geraden Linien berühren, Grenzflächen.[2])

Sie haben mit der F_2^∞ die beiden imaginären Erzeugenden, in denen diese von der Ebene $X_4 = 0$ berührt wird, und auch nur dieselben (also doppelt gezählt) gemeinsam. Sie sind äquidistante Flächen und gehen mit der F_2^∞ die größtmögliche Berührung ein.

§ 2.

Weitere Transformationen des Flächenbüschels in sich.

Die Bewegung (I) war charakterisiert durch den Parameter Λ.

Wir führen nun durch eine zweite Bewegung, welche durch die folgenden Transformationsgleichungen gegeben ist, den Punkt $X_i (x_i)$ nach $Y_i (y_i)$ über:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + iM (X_2 - X_3) - M^2 X_4 \qquad II) \\ Y_2 &= X_2 + iM X_4 \\ Y_3 &= X_3 - iM X_4 \\ Y_4 &= X_4 \end{aligned}$$

[1]) Also Grenzkurven, wie sie Cl. L., pag. 472 definiert sind.

[2]) Orisphaera bei Lobatcheffsky: siehe Frischauf „Elemente der absoluten Geometrie," Leipzig 1876; Parasphären bei Bolyai:

$$\begin{aligned}
\text{oder: } 2y_1 &= (2 - M^2)\, x_1 \quad - 2Mx_3 + 2k \quad M^2\, x_4 \\
y_2 &= \quad x_2 \\
y_3 &= \quad M\, x_1 \quad + \quad x_3 - 2k \quad M\, x_4 \\
4k\, y_4 &= \quad - M^2\, x_1 \quad - 2Mx_3 + 2k\,(2 + M^2)\, x_4
\end{aligned}$$

wodurch Gleichung 2) in sich übergeht:

$$Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + \mu Y_4^2 = X_1 X_4 + X_2 X_3 + \mu X_4^2$$

oder: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4k^2 y_4^2 + \mu (y_1 - 2k\, y_4)^2$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4k^2 x_4^2 + \mu (x_1 - 2k\, x_4)^2.$$

Bestimmt man die Elemente, die fest bleiben, d. h. die Punkte der jetzigen Rotationsaxe, so erhält man

$$\frac{X_2 - X_3}{i} = 0 \quad X_4 = 0 \quad [x_3 = 0 \;\; x_1 - 2k\, x_4 = 0].$$

Als Axe wurde also der konjugierte spezielle Komplex benützt, während die Axe des Ebenenbüschels, das in sich übergeführt wird:

$$\frac{X_2 + X_3}{2} + \lambda X_4 = 0 \quad [x_2 + \lambda (x_1 - 2k\, x_4) = 0] \qquad b)$$

die Rotationsaxe der Bewegung I) ist.

Das Büschel b) ist also konjugiert zu dem Büschel a) in Bezug auf die F_2^{∞}; die Ebenen stehen also zueinander senkrecht.

Die Bewegung II), welche charakterisiert ist durch den Parameter iM — eigentlich gehen die Gleichungen II) in den Koordinaten X_i aus den Gleichungen I) durch Vertauschung von X_2 durch iX_3 und von X_3 durch iX_2 [in den Koordinaten $xi \cdots$ von x_2 durch $-x_3$ und von x_3 durch $-x_2$] hervor — erfolgt also senkrecht zur Bewegung „Λ".

Jeder Punkt des Raumes bewegt sich in der durch ihn gehenden Ebene auf der zugehörigen Grenzkurve, welche in diesem Punkt orthogonal ist zu der entsprechenden Grenzkurve (Λ), die mit ihr auf der gleichen Grenzfläche liegt.

Es sind also durch die beiden Bewegungen „Λ" und „iM" zwei Scharen von orthogonalen Grenzkurven auf jeder Grenzfläche definiert.

Setzen wir nun diese beiden Bewegungen zu einer einzigen zusammen, bestimmen also die Transformation, durch welche $\Xi_i (\xi_i)$ in $Y_i (y_i)$ übergeführt wird, so finden wir:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \Xi_1 + (\Lambda + iM)\, \Xi_2 + (\Lambda - iM)\, \Xi_3 - (\Lambda^2 + M^2)\, \Xi_4 \qquad \text{III)} \\
Y_2 &= \quad \Xi_2 \quad - (\Lambda - iM)\, \Xi_4 \\
Y_3 &= \quad \Xi_3 - (\Lambda + iM)\, \Xi_4 \\
Y_4 &= \quad \Xi_4
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
2y_1 &= (2-\Lambda^2-M^2)\,\xi_1 + 2\Lambda\,\xi_2 - 2M\,\xi_3 + 2k\,(\quad \Lambda^2+M^2)\,\xi_4 \qquad \text{III')}\\
y_2 &= \quad -\Lambda\;\xi_1 + \quad \xi_2 \quad\quad + 2k\Lambda \quad\quad \xi_4\\
y_3 &= \quad\; M\;\xi_1 \quad\quad + \quad \xi_3 - 2kM \quad\quad \xi_4\\
4k\,y_4 &= (\;-\Lambda^2-M^2)\,\xi_1 + 2\Lambda\,\xi_2 - 2M\,\xi_3 + 2k\,(2+\Lambda^2+M^2)\,\xi_4
\end{aligned}$$

Auch diese Transformation führt das Flächenbüschel in sich über:

$$Y_1Y_4 + Y_2Y_3 + \mu Y_4^2 = \Xi_1\Xi_4 + \Xi_2\Xi_3 + \mu\Xi_4^2$$

$$[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4k^2y^2 + \mu(y_1 - 2k\,y_4)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 4k^2\xi_4^2 + \mu(\xi_1 - 2k\,\xi_4)^2].$$

Fest bleiben bei der Bewegung die Punkte der Axe

$$\Lambda(Y_2 + Y_3) - iM(Y_2 - Y_3) = 0 \quad Y_4 = 0$$

$$[y_2\Lambda + y_3 M = 0 \quad y_1 - 2ky_4 = 0].$$

Die Bewegung III) geschieht also um einen der speziellen Komplexe der linearen Schar, die zu Grundelementen die Rotationsaxen I) u. II) hat.

In sich übergeführt werden die Ebenen des Büschels

$$\frac{Y_2 - Y_3}{2i}\Lambda + \frac{Y_2 + Y_3}{2}M + \lambda Y_4 = 0 \qquad \text{c)}$$

$$[y_3\Lambda + y_2 M + \lambda(y_1 - 2ky_4) = 0].$$

Dies Ebenenbüschel c) schneidet aus jeder Grenzfläche eine Schar von ∞^1 Grenzkurven aus, die eine bestimmte Richtung gegen die beiden anderen Scharen hat. Lassen wir Λ und M beliebig variieren, so bekommen wir durch das Ebenenbündel im Punkte P^∞ ($X_2 = 0$ $X_3 = 0$ $X_4 = 0$) aus der Grenzfläche alle möglichen (∞^2) Grenzkurven ausgeschnitten.

§ 3.

Darstellung der komplexen Zahl.

Nach diesen Betrachtungen kommen wir zurück auf die Frage: „Wie deutet sich der n. e. Mensch eine komplexe Zahl $z = x + iy$ geometrisch?“

Er stellt sie sich auf der Grenzfläche dar.

Er legt eine Grenzfläche mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu Grunde. Dieses wird gebildet von einem beliebigen Anfangspunkte Ξ_i (ξ_i) und den beiden zueinander orthogonalen Scharen von Grenzkurven.

Nun müssen wir zusehen, wie sich aus dieser Grundlage alles zu einer Funktionentheorie in geometrischer Hinsicht Erforderliche entwickelt.

Wir hatten in der Ebene ein geradliniges Koordinatensystem, also gebildet von den kürzesten Linien der Ebene.

Diese Grenzkurven sind auch die kürzesten Linien auf der Grenzfläche.[1]) Daß sie orthogonal sind, ist schon oben erwähnt. Da die zu den Grenzkurven „Λ“ orthogonalen Grenzkurven schon durch den Parameter „iM“ charakterisiert sind, liegt hier diese Darstellung der komplexen Zahl noch viel näher als die gewöhnlich gebrauchte Darstellung in der komplexen Ebene. Wir setzen also fest:

Wir bezeichnen den Punkt $Y_i\,(y_i)$, in den der Nullpunkt $\Xi_i\,(\xi_i)$ übergeht durch die Aufeinanderfolge der Bewegungen „Λ“ und „iM“ mit

$$\Lambda + iM$$

und nennen ihn den Träger (Bildpunkt) der komplexen Variablen $z = \Lambda + iM$.

§ 4.

Das Koordinatensystem.

Für die Grenzfläche müssen wir die Elemente der analytischen Geometrie entwickeln, um sie zu unsern funktionentheoretischen Zwecken gebrauchen zu können.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt $\Xi_i\,(\xi_i)$ einer Grenzfläche und ziehen durch ihn zwei zueinander orthogonale Grenzkurven und bezeichnen diese als Koordinatenaxen.

Da wir jederzeit auf die Koordinaten X_i oder x_i zurückzugehen haben, so werden wir

1. die Gleichung der Grenzfläche, die wir benutzen
2. den Koordinatenanfangspunkt $\Xi_i\,(\xi_i)$

möglichst einfach annehmen.

ad 1) Wir hatten die Gleichung der F_2^{∞}: $X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0$ und die Gleichung einer Grenzfläche: $X_1 X_4 + X_2 X_3 + \mu X_4^2 = 0$.

Durch die Substitution

$$Y_1 = X_1 + \mu X_4;\quad Y_2 = X_2;\quad Y_3 = X_3;\quad Y_4 = X_4$$

wird die Gleichung der Grenzfläche

$$Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 = 0. \qquad 2')$$

ad 2) In diesem Koordinatensystem Y_i nehmen wir als Punkt $\Xi_i\,(\xi_i)$ den Punkt mit den Koordinaten $0:0:0:1$ $\left(\frac{1}{2}:0:0:-\frac{1}{4k}\right)$.

Die Transformationsgleichungen III) werden dann folgende:

---

[1]) Nach Cl. L., pag. 322 (13).

$$\begin{aligned} \rho\, Y_1 &= -(\Lambda^2 + M^2) & \sigma\, y_1 &= \frac{1 - \Lambda^2 - M^2}{2} \\ \rho\, Y_2 &= -(\Lambda - iM) & \sigma\, y_2 &= -\Lambda \\ \rho\, Y_3 &= -(\Lambda + iM) & \sigma\, y_3 &= M \\ \rho\, Y_4 &= 1 & \sigma\, y_4 &= -\frac{1 + \Lambda^2 + M^2}{4k} \end{aligned} \qquad \text{III''})$$

Die Gleichung 2') ist erfüllt:

$$Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 = 0 \qquad [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4k^2 y_4^2 = 0].$$

Hieraus folgt für Λ und M:

$$\Lambda = -\frac{Y_3 + Y_2}{2 Y_4} \qquad \Lambda = -\frac{y_2}{y_1 - 2ky_4}$$

$$M = -\frac{Y_3 - Y_2}{2i Y_4} \qquad M = \frac{y_3}{y_1 - 2ky_4}$$

Wir sehen also: $\left.\begin{matrix} \Lambda = 0 \\ M = 0 \end{matrix}\right\}$ bedeutet die Grenzkurve, welche die Ebene $\left\{\begin{matrix} Y_2 + Y_3 = 0 & (y_2 = 0) \\ \dfrac{Y_2 - Y_3}{i} = 0 & (y_3 = 0) \end{matrix}\right\}$ aus der Grenzfläche ausschneidet.

$\left.\begin{matrix} \Lambda = \text{konst.} = a \\ M = \text{konst.} = b \end{matrix}\right\}$ ist die Grenzkurve, welche ausgeschnitten wird von einer Ebene des Büschels $\left\{\begin{matrix} 2): \\ 1): \end{matrix}\right.$

$$\left.\begin{matrix} Y_3 + Y_2 + 2a\ Y_4 = 0 & [y_2 + a(y_1 - 2ky_4) = 0] \\ Y_3 - Y_2 + 2ib\ Y_4 = 0 & [y_3 - b(y_1 - 2ky_4) = 0] \end{matrix}\right\}$$

Die Grenzkurven $\Lambda = \text{const.}$ ($M = \text{const.}$) begegnen sich auf der Grenzfläche nur im unendlich-fernen Punkt, sind also je unter sich als „parallel" zu bezeichnen. Sie sind somit als Koordinatensystem verwendbar.

§ 5.

Der Punkt und die Entfernung zweier Punkte (Bogenelement).

Zwei Grenzkurven $\Lambda = a$ und $M = b$ schneiden sich im Endlichen einmal auf der Grenzfläche in einem Punkte, den wir mit a, b bezeichnen. Er ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Grenzfläche, in welcher sich die zugehörigen Ebenen

$$Y_2 + Y_3 + 2a\ Y_4 = 0 \qquad [y_2 + a(y_1 - 2ky_4) = 0]$$

$$Y_2 - Y_3 + 2ib\ Y_4 = 0 \qquad [y_3 - b(y_1 - 2ky_4) = 0]$$

schneiden.

Der Punkt a, b hat die Koordinaten:

$$\rho\, Y_1 = -(a^2 + b^2) \qquad \sigma\, y_1 = -\frac{1 - a^2 - b^2}{2}$$
$$\rho\, Y_2 = -(a - ib) \qquad \sigma\, y_2 = -a$$
$$\rho\, Y_3 = -(a + ib) \qquad \sigma\, y_3 = b$$
$$\rho\, Y_4 = 1 \qquad \sigma\, y_4 = -\frac{1 + a^2 + b^2}{4k}$$

Ein Punkt ist durch die beiden Parameter a und b auf der Grenzfläche eindeutig bestimmt und soll als Träger des Wertes der komplexen Zahl

$$c = a + ib$$

gelten.

Da hier von vornherein nur ein unendlich-ferner Punkt (P^∞) existiert, so ist dieser selbstverständlich der Träger des Wertes „∞“.

Bei zwei Punkten erhebt sich die Frage nach der Entfernung derselben auf der Grenzfläche.

Dazu kommen wir auf folgendem Wege:

Durch Bewegung I) kam Punkt Ξ_i nach X_i; durch eine genau gleiche Bewegung I) komme Punkt X_i nach Z_i.

Aus den Transformationsgleichungen:

$$Z_1 = \Xi_1 + 2\Lambda(\Xi_2 + \Xi_3) - 4\Lambda^2\Xi_4$$
$$Z_2 = \Xi_2 - 2\Lambda\Xi_4$$
$$Z_3 = \Xi_3 - 2\Lambda\Xi_4$$
$$Z_4 = \Xi_4$$

ersieht man, daß wir von Ξ_i nach Z_i gelangen durch die Bewegung „2Λ“, oder durch Zusammensetzung zweier Bewegungen „Λ“, ganz im Gegensatz zu den Bewegungen in der n. e. Ebene, wo an Stelle der Summe der Parameter das Produkt derselben tritt. Schon hieraus können wir schließen, daß die metrischen Verhältnisse auf der Grenzfläche denen der euklidischen Ebene analog sein werden.

Bestätigt und weiter ausgeführt wird dieser Schluß durch Anwendung einer infinitesimalen Transformation.

1. Wir führen den Punkt X_i durch die Bewegung „$d\Lambda$“ über in den in der Richtung Λ benachbarten Punkt $X_i + dX_i$ der Fläche. Dann ergibt sich n. e. gemessen unter Vernachlässigung der unendlich-kleinen Glieder höherer Ordnung die unendlich-kleine Entfernung der beiden Punkte als

$$ds = \frac{2k}{\sqrt{\mu}}\, d\Lambda. \qquad \alpha)$$

Das Wegelement, das wir uns auch auf der Fläche gemessen denken können, ist proportional dem unendlich-kleinen Parameter der zugehörigen Bewegung.

Addieren wir die unendlich-kleinen Wegelemente auf der Grenzkurve ($M = 0$) und beachten auch die Addierbarkeit der Bewegungsparameter in einer Richtung, so kommen wir zu der endlichen Weglänge, die der Punkt Ξ_i ($\Lambda = 0$) während der Bewegung „Λ“ auf der Fläche zurücklegt, durch die Integration:

$$s = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\Lambda} d\Lambda = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} \Lambda.$$

Da weder eine Richtung noch eine Stelle der Grenzfläche (außer dem P^{∞}) durch die Transformationsgleichungen ausgezeichnet ist, gilt das Resultat allgemein. Es ist eben dann das Koordinatensystem so zu legen, daß die Richtung der Bewegung als Λ-Richtung genommen wird.

2. Das Wegelement ds', das der Punkt bei einer unendlich-kleinen Bewegung „$i \cdot dM$“ also 2. Art beschreibt, ergibt sich als

$$ds' = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} dM \qquad \beta)$$

$$s' = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\mu} dM = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} M.$$

Dies folgt schon daraus, daß keine Richtung ausgezeichnet ist. Wenn die Bewegung „$i dM$“ genannt wird, so ist es nur daraus zu erklären, daß wir zur Aufstellung des Bogenelementes die Koordinaten X_i benützen; denn in den Gleichungen II') mit den Koordinaten ξ_i, welche die reellen Verhältnisse auch reell darstellen, kommt nie „$i \cdot M$“, sondern nur „M“ vor.

3. Bestimmen wir weiter das Wegelement, welches ein Punkt der unendlich-kleinen aus 1) u. 2) zusammengesetzten Bewegung III) beschreibt, so finden wir

$$ds'' = \frac{2k}{\sqrt{\mu}} \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2}$$
$$= \sqrt{(ds)^2 + (ds')^2}$$

ds'' setzt sich also aus den beiden zueinander senkrechten Wegelementen ds und ds' genau so zusammen wie in der euklidischen Ebene:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Bestimmen wir nun den endlichen Weg, den der Punkt Ξ_i auf einer Grenzkurve beschreibt, um auf ihr nach Y_i zu gelangen, so müssen wir beachten, daß auf der Grenzkurve M eine lineare Funktion von Λ ist.

Denn die Gleichung einer beliebigen Grenzkurve ist, wie wir noch nachtragen werden:

$$a\Lambda + bM + c = 0$$

$$dM = -\frac{a}{b}\,d\Lambda.$$

Auf dieser Kurve sollen nun die Punkte Λ', M' und Λ'' M'' liegen.

$$\begin{array}{l} a\Lambda' + bM' + c = 0 \\ a\Lambda'' + bM'' + c = 0 \\ \hline -\frac{a}{b} = \frac{M' - M''}{\Lambda' - \Lambda''} \end{array}$$

also
$$s = \frac{2k}{\sqrt{\mu}}\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}\int_{\Lambda''}^{\Lambda'} d\Lambda$$

$$s = \frac{2k}{\sqrt{\mu}}\sqrt{(\Lambda' - \Lambda'')^2 + (M' - M'')^2}$$

Wir sehen also, daß sich die Entfernung zweier Punkte, auf der Grenzfläche gemessen, durch die Parameter Λ' und M', Λ'' und M'' genau so darstellt[1]) wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie bis auf einen konstanten Faktor, welcher von der Wahl der Grenzfläche und der ersten n. e. Konstanten abhängt.

§ 6.

Die Gerade und der Winkel zweier Geraden.

Nachdem wir nun den Punkt betrachtet haben, wenden wir uns dem Analagon für die Gerade zu, d. h. dem Gebilde, das durch eine in den Koordinaten Λ, M lineare Gleichung definiert ist:

$$a\Lambda + bM + c = 0 \qquad 4)$$

d. h. $(Y_3 + Y_2)\,a\,i + (Y_3 - Y_2)\,b - 2\,c\,i\,Y_4 = 0$

$$(-a\,y_2 + b\,y_3 + c\,(y_1 - 2k y_4) = 0) \qquad 4')$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche dem Büschel c) angehört:

$$\Lambda = a\,i \quad M = -b\,i \quad \lambda = -2c.$$

---

[1]) Cl. L., pag. 504. Das wußte auch schon Lobatcheffsky; ebenso ist ihm die Gültigkeit der Winkelrelationen (Tangente) auf der Grenzfläche schon bekannt.

Läßt man c variieren, so erhält man alle Grenzkurven, die von dem Ebenenbüschel c) aus der Grenzfläche ausgeschnitten werden. Dieselben begegnen sich nur im P^{∞}, wir nennen sie deshalb parallel. Nimmt c den Wert Null an, so ist die Gleichung 4) durch den Punkt (0,0) und 4') durch den Punkt (0 : 0 : 0 : 1), also durch den Anfangspunkt befriedigt.

Durch einen Punkt Λ', M' gibt es nur eine Kurve der Schar 4)

$$a\Lambda + bM + c = 0$$
$$a\Lambda' + bM' + c = 0$$

nämlich $$a\Lambda + bM - (a\Lambda' + bM') = 0.$$

Soll die Grenzkurve durch zwei Punkte $\Lambda'M'$, $\Lambda''M''$ gehen, so ist sie dadurch völlig bestimmt:

$$\frac{\Lambda'' - \Lambda}{M'' - M} = \frac{\Lambda' - \Lambda}{M' - M}$$

Schließlich können wir der Gleichung einer Grenzkurve noch folgende Formen geben:

$$A\Lambda + BM + C = 0$$
$$\frac{\Lambda}{a} + \frac{M}{b} = 1$$
$$M = m\Lambda + n.$$

Diese allgemeinen Formen einer linearen Gleichung schließen die speziellen Fälle von Grenzkurven in sich:

$\Lambda = 0$ $(M = 0)$	Gleichung	der M (Λ) Axe
$\Lambda =$ konst. $(M =$ konst.$)$	„	einer Parallelen zur M (Λ) Axe
$a\Lambda + bM = 0$	„	einer Grenzkurve durch den Anfangspunkt.

Haben wir nun oben den Begriff „parallel“ allgemein eingeführt und den Begriff „senkrecht“ im speziellen Fall des Koordinatensystems, so ist es jetzt nötig, allgemein den Winkel zweier Grenzkurven zu definieren.

Da müssen wir nun, wie bei der Entfernung auf die F_2^{∞} als Grundlage aller n. e. Maßbestimmungen zurückgehen.

Wie aus der Entstehungsweise der Grenzfläche erhellt, verhält sich diese an allen Stellen gleich; wir können uns also darauf beschränken, den Winkel φ zu bestimmen, der von den beiden Grenzkurven

$$\frac{M}{\Lambda} = a \text{ und } M = 0$$

eingeschlossen wird.

Als Winkel der beiden ist zu nehmen der Winkel der Tangenten an sie in der Tangentialebene ihres Schnittpunktes $(0:0:0:1)$. Diese ist $Y_1 = 0$ $(y_1 + 2ky_4 = 0)$.

Die beiden Ebenen der Grenzkurven sind:

$$Y_2(1 - ai) - Y_3(1 + ai) = 0 \text{ und } \frac{Y_2 - Y_3}{i} = 0$$

$$(a y_2 + y_3 = 0 \text{ und } y_3 = 0).$$

Da sämtliche hier in Betracht kommende Ebenen konjugiert sind zur Ebene $Y_1 = 0$ $(y_1 + 2ky_4 = 0)$ in Bezug auf die F_2^∞ — die Schnittgerade $Y_2 = 0$ $Y_3 = 0$, durch welche alle hier vorkommenden Ebenen gehen, ist die konjugierte Polare zu der Schnittgeraden $Y_1 = 0$ $Y_4 = 0$ (resp. $Y_1 - \mu Y_4 = 0$) — also zu ihr senkrecht stehen, so ist es gestattet, zur Definition des Winkels der Schnittgeraden auch das Doppelverhältnis der betreffenden Ebenen zu verwenden, d. h. die Geraden schneiden die Ebenenwinkel in $Y_1 = 0$ aus.

Der Winkel zweier Ebenen ist definiert als der mit ik′ multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses derselben mit den beiden Tangentialebenen des Büschels an die F_2^∞. Dieselben sind in unserem Falle:

$$Y_2 = 0 \ (y_2 + i y_3 = 0) \text{ und } Y_3 = 0 \ (y_2 - i y_3 = 0).$$

Sie sind natürlich imaginär, da die Axe des Büschels die F_2^∞ in zwei reellen Punkten trifft. Deshalb wird auch mit ik′ multipliziert.

Diese Tangentialebenen sind die Ebenen durch die imaginären Erzeugenden der unendlich-fernen Tangentialebene und die Axe.

Das Doppelverhältnis der vier Ebenen

$$\frac{Y_2}{Y_3} = 1; \quad \frac{Y_2}{Y_3} = \frac{1+ai}{1-ai}; \quad \frac{Y_2}{Y_3} = 0; \quad \frac{Y_2}{Y_3} = \infty \text{ ist}$$

$$\alpha = \frac{1+ai}{1-ai} \left(\text{oder } \frac{1-ai}{1+ai}\right)$$

$$[a y_2 + y_3 = 0; \ x_3 = 0; \ -i x_2 + x_3 = 0; \ i x_2 + x_3 = 0]$$

und der zugehörige Winkel

$$\varphi = ik' \log\left[\frac{1+ai}{1-ai}\right] \qquad 5)$$

k′ ist die (zweite) n. e. Konstante für die Winkelbestimmung, die durch die Festsetzung, daß ein bestimmter Winkel ein rechter sei, festgelegt werden kann.

Sie hat den Wert $k' = \mp\frac{1}{2}$; denn für $\alpha = -1$ ergibt 5)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = \mp k'\pi \qquad a = \infty.$$

Wir nehmen $k' = -\frac{1}{2}$, also

$$\varphi = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + ai}{1 - ai} \right);$$

daraus folgt nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi = a = \frac{M}{\Lambda}, \qquad 6)$$

a nennen wir gewöhnlich den Richtungskoeffizienten.

Alle Grenzkurven

$$a\,\Lambda - M = \text{konst.}$$

haben dieselbe Neigung gegen die Λ-Axe. Wir brauchen nur eine Koordinatentransformation

$$\overline{\Lambda} = \Lambda, \quad \overline{M} = M + \text{konst.}$$

vorzunehmen, so erhalten wir wieder die Form

$$\frac{\overline{M}}{\overline{\Lambda}} = a,$$

werden sie doch alle ausgeschnitten von einem Parallelebenenbüschel. Durch die Koordinatentransformation verschieben wir nur den beliebigen Anfangspunkt auf der Λ-Axe; dies hat auf die Richtung keinen Einfluß.

Wir können auf diese Weise alle Winkelrelationen von der gewöhnlichen Geometrie übernehmen z. B. der Winkel zweier beliebiger Grenzkurven ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2},$$

wenn ihre Gleichungen die Form haben:

$$M = a_1 \Lambda + b_1; \quad M = a_2 \Lambda + b_2.$$

§ 7.

Metrik auf der Grenzfläche und die absoluten Richtungen.

Als tieferer Grund für diese weitgehenden Übereinstimmungen muß folgende interessante Tatsache gelten.

In der euklidischen Ebene haben wir allgemein die parabolische Maßbestimmung: z. B. eine Gerade hat einen unendlich-fernen Punkt, die Ebene hat eine unendlich-ferne Gerade, durch welche das Unendlich-Ferne charakterisiert ist.

Die Grundlage projektiver Auffassung metrischer Verhältnisse bilden die imaginären Kreispunkte.

Daraus folgt allerdings auch, daß die Maßbestimmung im Strahlbüschel notwendig eine elliptische[1]) ist; denn wir haben hier bei einer linearen Transformation im binären Gebiete des Strahlbüschels zwei imaginäre Elemente, die Geraden nach den imaginären Kreispunkten, welche fest bleiben, während auf der Geraden nur der unendlich-ferne Punkt fest bleibt. [Elliptische Maßbestimmung herrscht auch auf der unendlich-fernen Geraden.]

Ähnliche (man kann sagen dualistisch entsprechende) Verhältnisse haben wir in dem speziellen Ebenenbündel des P^∞, d. h. auf der Grenzfläche.

Eine Grenzkurve hat einen unendlich-fernen Punkt. Das Unendlich-Ferne ist durch einen Punkt charakterisiert, durch den alle parallelen Grenzkurven in einer gemeinsamen Richtung hindurch gehen. Die Grundlage zu einer projektiven Auffassung der metrischen Verhältnisse auf der Grenzfläche (Winkel und Abstand) bilden die beiden imaginären Erzeugenden (Richtungen) durch den P^∞. Die Grenzfläche ist also ein Gebilde mit im allgemeinen parabolischer Maßbestimmung: Die Grenzkurve hat einen unendlich-fernen Punkt, die Grenzfläche hat einen unendlich-fernen Punkt.

Von den verschiedenen Formen von Grenzkurvengleichungen haben wir noch eine zu berücksichtigen:

$$\Lambda + i\,M = 0 \quad (\Lambda - i\,M = 0) \quad [\Lambda^2 + M^2 = 0].$$

Dieselben werden ausgeschnitten durch die Koordinatenebenen

$$Y_3 = 0 \quad (Y_2 = 0) \quad [y_2 - i\,y_3 = 0 \quad (y_2 + i\,y_3 = 0)].$$

Diese Grenzkurven sind imaginär, wie auch die Ebenen, in denen sie liegen.

Letztere gehen auch durch die beiden unendlich-fernen imaginären Erzeugenden der Grenzfläche. Die betreffenden Grenzkurven sind also keine dreifach berührenden Kegelschnitte, sondern die imaginären Erzeugenden der nichtgeradlinigen Grenzfläche durch den Anfangspunkt, Minimalgerade der Fläche mit der Länge Null.

Von jedem Punkte gehen zwei derselben aus, entsprechend den absoluten Richtungen nach den imaginären Kreispunkten in der euklidischen Ebene.

In der Tat, die obige Winkeldefinition läßt sich auch gründen auf das Doppelverhältnis zweier Grenzkurven zu den Minimalgeraden ihres Schnittpunktes.

---

[1]) Klein, „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie.“ Math. Ann. IV.

$$\Lambda - \frac{1}{a} M = 0; \quad M = 0; \quad \Lambda + i M = 0; \quad \Lambda - i M = 0;$$

$$\alpha = \frac{1 - ai}{1 + ai} \text{ wie oben.}$$

§ 8.

Der Kreis und die stereographische Projektion der Fläche.

Noch weiter läßt sich diese Analogie führen, wenn wir zum Kreise auf der Grenzfläche übergehen.

Wir definieren den Kreis als geometrischen Ort aller Punkte der Fläche, die von einem gegebenen Punkte konstante auf der Fläche gemessene Entfernung haben, also als geodätischen Kreis der Fläche.

$$\Lambda^2 + M^2 = \frac{s^2 \cdot \mu}{4k^2} = r^2 \qquad \text{I)}$$

s ist die auf der Fläche gemessene Entfernung,

r ist der Parameter der Bewegung, die von dem Mittelpunkt zu irgend einem Punkte der Peripherie führt.

Die Gleichung I) ist in Koordinaten $Y_i(y_i)$:

$$Y_2 Y_3 - r^2 Y_4^2 = 0 \quad [y_2^2 + y_3^2 - r^2 (y_1 - 2k y_4)^2 = 0]. \qquad \text{I')}$$

Man sieht, daß die Kurve aus der Fläche ausgeschnitten wird durch einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze im P^∞ der Fläche liegt, also eigentlich durch einen Zylinder.

Dieser wird von der unendlich-fernen Ebene (E^∞) $Y_4 = 0$ in dem ausgezeichneten Linienpaare $Y_2 = 0$ $Y_3 = 0$ geschnitten (berührt).

Für die Klarlegung dieser Verhältnisse in projektivem Sinne, d. h. der Beziehungen zwischen Ebenenbündel und Grenzfläche empfiehlt sich die Abbildung der Fläche auf die Tangentialebene $Y_1 = 0$ $(y_1 + 2k y_4 = 0)$ des Nullpunktes durch Projektion von P^∞ aus.[1])

Die Abbildung wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho Y_2 &= \eta_2 & \varkappa Y_1 &= -\eta_2 \eta_3 \\ \rho Y_3 &= \eta_3 & \varkappa Y_2 &= \eta_1 \eta_2 \\ \rho Y_1 &= \eta_1 & \varkappa Y_3 &= \eta_1 \eta_3 \\ & & \varkappa Y_4 &= \eta_1^2 \end{aligned} \qquad \text{II)}$$

$$Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 = 0$$

[1]) In der Bildebene herrscht die hyperbolische Maßbestimmung.

oder:

$$\begin{array}{lll} \rho y_2 = \zeta_2 & \varkappa(y_1 + 2ky_4) = -(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) & \text{II')} \\ \rho y_3 = \zeta_3 & \varkappa y_2 = \zeta_1\zeta_2 & \\ \rho(y_1 - 2ky_4) = \zeta_1 & \varkappa y_3 = \zeta_1\zeta_3 & \\ & \varkappa(y_1 - 2ky_4) = \zeta_1^2 & \\ & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4k^2 y_4^2 = 0. & \end{array}$$

Das Koordinatendreieck der Bildebene wird also ausgeschnitten durch die Ebenen:

$$Y_2 = 0 \quad Y_3 = 0 \quad Y_4 = 0 \quad (y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_1 - 2ky_4 = 0)$$

Die Abbildung ist eindeutig mit Ausnahme des P^∞

$$Y_2 = 0 \quad Y_3 = 0 \quad Y_4 = 0 \quad (y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_1 - 2ky_4 = 0),$$

welchem die ganze Linie $\eta_1 = 0$ ($\zeta_1 = 0$) entspricht. Die durch den P^∞ gehenden beiden imaginären Erzeugenden haben als Bilder die i. Punkte O und O', die mit den imaginären Kreispunkten verglichen werden können. Es ist aber zu bemerken, daß beide Gebilde ideal, d. h. außerhalb des C_2^∞ der Bildebene gelegen sind.

Das Bild unserer Kurve wird

$$\eta_2\eta_3 - r^2\eta_1^2 = 0 \quad (\zeta_2^2 + \zeta_3^2 - r^2\zeta_1^2 = 0). \qquad \text{I'')}$$

Um diese Gleichung I'') diskutieren zu können, müssen wir die Gleichung des C_2^∞ der Bildebene als Schnitt derselben mit der F_2^∞ aufstellen: $\eta_2\eta_3 - \mu\eta_1^2 = 0$ $(\zeta_2^2 + \zeta_3^2 - \mu\zeta_1^2 = 0)$. III)

[Wollen wir die letztere Form in Übereinstimmung bringen mit der allgemein üblichen Form

$$x^2 + y^2 - 4k^2t^2 = 0$$

der Gleichung des C_2^∞ (des Fundamentalkreises nach Klein[1]), so müssen wir die Grenzfläche $\mu = 4k^2$ wählen, so daß auch die oben gewonnenen Ausdrücke für die betreffenden Bogenelemente ds, ds', ds'' und die Entfernung s zweier Punkte resp. einfach $d\Lambda$, dM,

$\sqrt{d\Lambda^2 + dM^2}$, $\sqrt{(\Lambda' - \Lambda'')^2 + (M' - M'')^2}$ werden.

Die Kreisgleichung I) ist dann $\Lambda^2 + M^2 = s^2 = r^2$.]

Wir sehen, daß Gleichung I'') und III) Kegelschnitte desselben Büschels darstellen, die sich in den beiden Punkten O (u. O')

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = 0 : 1 : 0 \quad (\text{u } 0 : 0 : 1)$$

berühren, also eine, als Kegelschnitt des Büschels doppelt zählende, gemeinsame Berührungssehne $\eta_1 = 0$ ($\zeta_1 = 0$) und vom Pol derselben aus $(1 : 0 : 0)$ gemeinsame Tangenten

$$\eta_2 = 0 \quad \eta_3 = 0 \quad (\zeta_2 + i\zeta_3 = 0 \quad \zeta_2 - i\zeta_3 = 0)$$

besitzen.

[1]) Klein, „Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie.“ pag. 109.

Die Gleichung I'') stellt also einen n. e. Kreis dar mit dem Radius[1]) $R = 2ik \operatorname{arctg} ir$.

Nach der Theorie der Abbildung einer F^2[2]) bestimmt sich aus der Gleichung der Bildkurve immer durch Wiedereinsetzen der Raumkoordinaten in den entsprechenden Verbindungen die Fläche, welche die gegebene Kurve aus der F^2 ausschneidet.

Wir erhalten demnach aus I'':

$$\eta_2 \eta_3 - r_2 \eta_1^2 = 0$$

die Ebene $$Y_1 + r^2 Y_4 = 0,$$

also eine Parallelebene zur Bildebene $Y_1 = 0$, d. h. eine Ebene des Büschels, welches die Ebene $Y_1 = 0$ mit der E^∞ $Y_4 = 0$ bestimmt.

Die Gleichung $$\Lambda^2 + M^2 = r^2$$

stellt einen Kreis dar, denn der Zylinder

$$Y_2 Y_3 = r^2 Y_4^2$$

ist ein Kreiszylinder, welcher senkrecht steht auf beiden Ebenen.

Zum vollständigen Schnitt des Zylinders mit der Grenzfläche gehört außer diesem Kreise noch das unendlich-ferne Linienpaar der beiden imaginären Erzeugenden des P^∞ in der E^∞.

Wir können auch sagen: Dadurch, daß der Zylinder durch die beiden i. Erzeugenden geht, ist er als Kreiszylinder charakterisiert.

Der C_2^∞ der Bildebene wird ebenfalls durch einen solchen Zylinder projiziert; wir wollen ihn den „absoluten" Zylinder dieses Ebenenbündels nennen. Das Zylinderbüschel, das diese beiden konstituieren, schneidet aus der Grenzfläche die ∞^1 konzentrischen Kreise aus, die alle in Parallelebenen zu $Y_1 = 0$ liegen. Wir haben uns nur r^2 als veränderlich zu denken.

$r^2 = 0$ gibt die i. Erzeugenden des Anfangspunktes (in der Ebene $Y_1 = 0$) [Nullkreis, § 7].

$r^2 = \infty$ gibt die unendlich-fernen Erzeugenden des P^∞ (in der E^∞ $Y_4 = 0$).

Wir können weiter behaupten:

Jeder ebene Schnitt der Grenzfläche ist ein Kreis. (Die Grenzfläche verhält sich wie eine Kugel mit unendlich-fernem Mittelpunkt.[3])

Denn 1. ist der Punkt, von dem wir ausgingen, nicht ausgezeichnet, wie überhaupt kein endlicher Punkt;

[1]) Cl. L., pag. 472 (11).
[2]) Cl. L., XXI.
[3]) Cl. L., pag. 499.

2. ändert sich nur die Bildebene mit ihrem C_2^∞, nicht aber das unendlich-ferne Linienpaar. In jeder Tangential-(Bild-)Ebene gibt es diese Punkte O und O′ [wir dürfen sie geradezu auch imaginäre Kreispunkte nennen, aber wir müssen immer dessen eingedenk sein, daß diese Bezeichnung nur für die konzentrischen Kreise um den Tangentialpunkt gilt].

Diese Abbildung ist im Tangentialpunkt sogar konform; die ∞^1 Grenzkurven durch den Nullpunkt geben als Bild ein Strahlenbüschel (nämlich die zugehörigen Tangenten). Aber Konformität herrscht nur in diesem Punkte; je weiter wir uns von ihm auf der Bildebene entfernen, um so mehr wird der Unterschied merkbar. Wir kommen auf diese Verhältnisse noch einmal zurück (§ 10 c).

Wir müssen uns nun der allgemeinen Form einer Kreisgleichung zuwenden:

$$(\Lambda - a)^2 + (M - b)^2 = r^2.$$

Dieser allgemeine Fall ist sofort erledigt durch die Koordinatentransformation

$$\Lambda - a = \overline{\Lambda} \quad M - b = \overline{M}$$
$$\overline{\Lambda}^2 + \overline{M}^2 = r^2.$$

Dazu ist aber zu bemerken, daß die Bildkurve in $Y_1 = 0$ in diesem Falle kein Kreis, sondern ein n. e. Kegelschnitt durch die Punkte O und O′ ist, welcher den C_2^∞ der Bildebene in zwei weiteren reellen oder imaginären Punkten trifft.

Denn der zugehörige Zylinder ist:

$$Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 (a + ib) + Y_3 Y_4 (a - ib) + (a^2 + b^2 - r^2) Y_4^2 \quad 0$$
$$[(y_2 + a(y_1 - 2ky_4))^2 + (y_3 \quad b(y_1 - 2ky_4))^2 \quad r^2 (y_1 - 2ky_4)^2]$$

Die Bildkurve:

$$\eta_2 \eta_3 + \eta_2 \eta_1 (a + ib) + \eta_3 \eta_1 (a - ib) + (a^2 + b^2 - r^2) \eta_1^2 = 0$$
$$[(\zeta_2 + a\zeta_1)^2 + (\zeta_3 - b\zeta_1)^2 - r^2 \zeta_1^2 = 0].$$

Die letzte Form der Gleichung der Bildkurve könnte formal ja einen Kreis darstellen, aber nur bei euklidischer Interpretation. Wählen wir aber zur Bildebene die Tangentialebene des Mittelpunktes a, b (was der obigen Koordinatentransformation auf der Grenzfläche gleichkommt), so sind dort die Verhältnisse genau so wie im vorigen Falle in $Y_1 = 0$.

§ 9.

Die lineare gebrochene Funktion und die Kreisverwandtschaft.

Da wir nun die Elemente: Punkt, Gerade (Grenzkurve) und Kreis definiert und durch ihre Gleichungen in Λ und M dargestellt haben, können wir weiterfahren in unserer Betrachtung der geometrischen Grundlagen der Funktionentheorie. Wir wenden uns zuerst zu der linearen gebrochenen Funktion der komplexen Variablen Z:

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Die Koeffizienten a, b, c, d sollen hiebei beliebige komplexe Konstante sein, welche der Bedingung genügen:

$$ad - bc \neq 0.$$

Die Werte Z deuten wir uns in der gleichen Grenzfläche ($\mu = 4k^2$) oder wir denken uns zwei verschiedene Grenzflächen, aber mit demselben Parameter.

Wir deuten uns die Funktion Z dahin, daß jedem Punkte der z-Grenzfläche ein bestimmter Punkt der Z-Fläche eindeutig zugeordnet sei.

„Die z-Fläche ist vermöge der Funktion Z auf die Z-Fläche eindeutig abgebildet."

Spezielle Fälle:

1. Die ganze lineare Funktion $Z = az + b$

α) $a = 1 \quad b = b_1 + ib_2$

$$Z = \mathfrak{L} + i\mathfrak{M} = \Lambda + iM + b_1 + ib_2$$

$$\mathfrak{L} = \Lambda + b_1 \quad \mathfrak{M} = M + b_2$$

Translation.

β) $a = ke^{\alpha i} \quad b = 0$

$$\varkappa = 1$$

$$Z = \mathfrak{L} + i\mathfrak{M} = e^{\alpha i}(\Lambda + iM)$$

$$\mathfrak{L} = \Lambda \cos\alpha - M \sin\alpha \quad \mathfrak{M} = \Lambda \sin\alpha + M \cos\alpha$$

Drehung.

$$\alpha = 0$$

$$Z = \mathfrak{L} + i\mathfrak{M} = \varkappa(\Lambda + iM)$$

$$\mathfrak{L} = \varkappa\Lambda \quad \mathfrak{M} = \varkappa M$$

Ähnlichkeitstransformation.

Wir sehen also, daß auch der n. e. Mensch auf diesem Wege zu einem Begriff „Kongruenz", „Ähnlichkeit" von Figuren (auf der

Grenzfläche) sehr wohl kommen kann, während es in der Ebene für ihn keine ähnlichen Figuren gibt. Dies scheint bis jetzt noch nicht bemerkt worden zu sein.

2. $Z = \frac{1}{z}$

d. h. $\mathfrak{L} + i\mathfrak{M} = \frac{1}{\Lambda + iM}$

$$\mathfrak{L} = \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + M^2} \qquad \mathfrak{M} = \frac{-M}{\Lambda^2 + M^2}.$$

Dadurch werden einander zugeordnet die Punkte

$\mathfrak{L} = 0$	$\mathfrak{M} = 0$	$\Lambda = \infty$	$M = \infty$
$\mathfrak{L} = \infty$	$\mathfrak{M} = \infty$	$\Lambda = 0$	$M = 0$
$\mathfrak{L} = a$	$\mathfrak{M} = b$	$\Lambda = \frac{a}{a^2 + b^2}$	$M = \frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Wenden wir die Polardarstellung an

$$\text{also } z = r \cdot e^{i\vartheta},$$

wenn r die auf der Fläche gemessene Entfernung des Punktes Λ, M vom Nullpunkt und ϑ der Winkel der betreffenden Grenzkurve gegen die Λ-Axe ist:

$$r = \sqrt{\Lambda^2 + M^2} \qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{M}{\Lambda}$$

desgl.: $Z = \mathfrak{r}\, e^{i\Theta}$

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2} \qquad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}},$$

dann wird die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{r} \cdot e^{i\Theta} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\vartheta}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{r} \qquad \Theta = -\vartheta.$$

Dem Punkte r, ϑ wird der Punkt $\frac{1}{r}$, $-\vartheta$ zugewiesen. Wenn wir uns den Vorgang in einer Grenzfläche deuten, so kommen wir vom Punkte z zu Z, indem wir jenen am Einheitskreise, sodann an der Λ-Axe spiegeln.

NB.: „Spiegeln“ ist auf der Grenzfläche durch dieselben Konstruktionen definiert wie in der e-Ebene, nur daß an Stelle der Geraden, wie immer, die Grenzkurven treten.

Jedem Punkt des Einheitskreises

$$\Lambda^2 + M^2 = 1$$

ist hier sein Spiegelbild in Bezug auf die Λ-Axe zugeordnet.

Die Funktion, welche die Transformation durch reziproke Radien vermittelt, ist demnach

$$Z = \mathfrak{L} + i\mathfrak{M} = \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + M^2} + \frac{iM}{\Lambda^2 + M^2} = \frac{1}{\Lambda - iM}$$

also keine Funktion der komplexen Variablen z; es ist übrigens auch nicht für $\mathfrak{M}$ die Fundamentalbedingung erfüllt: Es ist

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \Lambda^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial M^2} \neq 0 .$$

Wir kehren also zu unserem Beispiel zurück. Auf die Verhältnisse der Inversion kommen wir durch den Prozeß der Spiegelung an der Λ-Axe leicht zurück.

Einer beliebigen Grenzkurve durch den Anfangspunkt:

$$\frac{M}{\Lambda} = a \text{ entspricht } \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}} = -a,$$

also ebenfalls eine Grenzkurve durch den Anfangspunkt, gewissermaßen ihr Spiegelbild an der Λ-Axe, aber der Fortschreitungsrichtung auf der einen Grenzkurve gegen den Nullpunkt entspricht; auf der andern die Richtung gegen den P^{∞}.

Einer Grenzkurve allgemein:

$$a\Lambda + bM + 1 = 0$$

entspricht der Kreis:

$$f(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}) = \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + a\mathfrak{L} - b\mathfrak{M} = 0$$

durch den Nullpunkt der Z-Fläche.

Um die Konformität dieser Abbildung nachzuweisen, genügt der Beweis, daß der Winkel φ, den jene Grenzkurve

$$a\Lambda + bM + 1 = 0$$

mit der Λ-Axe bildet, bis auf Vielfache von π gleich ist dem Winkel φ^1, unter dem der Kreis die $\mathfrak{L}$-Axe in dem entsprechenden Punkte schneidet, also gleich ist dem Winkel φ^1 der Tangente des Kreises in jenem Punkte gegen die $\mathfrak{L}$-Axe

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b}.$$

Wir bezeichnen hier mit Tangente die im Punkte $\mathfrak{L} = -a$ $\mathfrak{M} = 0$, den Kreis berührende Grenzkurve.

$$\operatorname{tg} \varphi^1 = \left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{L}}\right)_1 = -\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}}}\right)_1 = -\frac{a}{b}$$

$$\varphi^1 \quad \varphi\,(+\pi).$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$\mathfrak{M} = -\frac{a}{b}\mathfrak{L} + \text{konst.} \qquad \text{konst.} = -\frac{a^2}{b} \quad \text{also} \quad a\mathfrak{L} + b\mathfrak{M} + a^2 = 0.$$

Den Kreisen $Ar^2 + Br\cos(\vartheta - \alpha) + C = 0$
entsprechen die Kreise

$$A + B\mathfrak{r}\cos(\Theta + \alpha) + C\mathfrak{r}^2 = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

Wir haben also das Resultat:

Die durch die Funktion $Z = \frac{1}{z}$ vermittelte Abbildung der z-Fläche auf die Z-Fläche ist konform (ohne Umlegung der Winkel), und jeder Kreis der z-Fläche liefert wieder einen Kreis der Z-Fläche. Das außerhalb des Einheitskreises der z-Fläche gelegene $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}$ Gebiet ist das konforme Abbild des innerhalb des Einheitskreises der Z-Fläche gelegenen $\begin{matrix}\text{negativen}\\ \text{positiven}\end{matrix}$ Gebietes.

Wie bekannt, setzt sich die allgemeine lineare Funktion

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}$$

aus den vorausgeschickten Spezialfällen zusammen.

Die vermittelte Abbildung ist konform, weil es diese sind.

„Die Kreisverwandtschaft bleibt also auf der Grenzfläche in vollem Umfange bestehen."

§ 10.

Die Kegelschnitte.

a) Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Λ und M.

Um nun weitere Probleme der Funktionentheorie, speziell der konformen Abbildung, in Angriff nehmen zu können, müssen wir weiterfahren in der Interpretation von quadratischen Gleichungen in Λ und M und betrachten zunächst die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$\Lambda^2 + 2a\Lambda M + bM^2 + 2c\Lambda + 2dM + e = 0.$$

Sie wird ausgeschnitten durch den Zylinder:

$$(Y_3 + Y_2)^2 - 2ai(Y_3 + Y_2)(Y_3 - Y_2) - b(Y_3 - Y_2)^2 - 4c(Y_3 + Y_2)Y_4 + 4id(Y_3 - Y_2)Y_4 + 4eY_4^2 = 0$$

[oder: $y_2^2 - 2a\,y_2\,y_3 + b\,y_3^2 - 2c\,y_2 + 2d\,y_3 + e = 0$].

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt also den Schnitt eines allgemeinen Zylinders zweiten Grades mit der Grenzfläche, also eine Kurve vierter Ordnung, dar.

Der Schnitt mit der E^{∞} ergibt das Linienpaar

$$Y_1 = 0 \quad Y_3 + \frac{1 + b - 2i\sqrt{a^2 - b}}{1 - b - 2ai} Y_2 = 0$$

$$[y_1 - 2ky_4 = 0 \quad y_2 - (a + \sqrt{a_2 - b})\, y_3 = 0]$$

und

$$Y_4 = 0 \quad Y_3 + \frac{1 + b + 2i\sqrt{a^2 - b}}{1 - b - 2ai} Y_2 = 0$$

$$[y_1 - 2ky_4 = 0 \quad y_2 - (a - \sqrt{a^2 - b})\, y_3 = 0].$$

Letztere Gleichungen ergeben sofort die beiden Richtungen, in welchen die Kurve durch den P^{∞} geht:

$$\Lambda + (a + \sqrt{a^2 - b})\, M = 0$$

$$\Lambda + (a - \sqrt{a^2 - b})\, M = 0.$$

b) Die Parabel.

Ist $b^2 = a$, so fallen die Linien jenes Paares zusammen; wir bekommen einen Zylinder, den wir als parabolisch bezeichnen können. Er schneidet aus der Grenzfläche eine spezielle Kurve vierter Ordnung aus, die im unendlich-fernen Punkt geschlossen ist und mit einer Richtung durch ihn hindurchgeht.

Wir können ihre Gleichung durch Koordinatentransformation auf die Form

$$M^2 = 2p\,\Lambda$$

bringen, d. i. also der geometrische Ort eines Punktes, für den das Quadrat des Abstandes von der Λ-Axe zum Abstand von der M-Axe in konstantem Verhältnis steht; die K. Axen sind Axe und Scheiteltangente.

c) Ellipse und Hyperbel (Brennpunkte).

Das Linienpaar ist imaginär, wenn $b > a^2$; reell, wenn $b < a^2$.

Wir können also auf ähnliche Weise auch geodätische Ellipse und Hyperbel sowohl rein metrisch wie projektiv definieren.

1. Die geodätische Ellipse (Hyperbel) der Grenzfläche ist der geometrische Ort der Punkte, welche so zu zwei gegebenen Punkten liegen, daß die Summe (Differenz) ihrer Abstände von denselben konstant ist.

2. Sie ist der Schnitt des Zylinders zweiter Ordnung, der von der E^{∞} in einem imaginären (reellen) Linienpaare geschnitten wird.

oder 2a) Sie ist die Kurve zweiter Ordnung in Λ und M, welche in zwei imaginären (reellen) Richtungen durch den P^{∞} geht.

Wir hatten auch beim Kreise die beiden Definitionen:

1. Der (geodätische) Kreis auf der Grenzfläche ist der geometrische Ort aller Punkte der Fläche, welche von einem gegebenen Punkte gleiche Entfernung haben.

2. Er ist der Schnitt des Zylinders mit der Grenzfläche, der von der E^∞ in den beiden ausgezeichneten unendlich-fernen Erzeugenden geschnitten wird.

2a) Er ist die Kurve zweiter Ordnung in Λ und M, welche in den beiden ausgezeichneten imaginären Richtungen (Kreisrichtungen) durch den P^∞ geht.

Durch diesen weitgehenden Parallelismus mit den Verhältnissen der euklidischen Ebene einerseits und durch die Existenz eines einzigen unendlich-fernen Punktes anderseits (wie in der komplexen Ebene) stellt die Grenzfläche ein Hilfsmittel zur Darstellung der komplexen Zahl dar, welches in sich die Vorzüge der komplexen Ebene mit der Möglichkeit, alle metrischen Beziehungen auch projektiv zu deuten, vereinigt.

Beispiel der Ellipse:

$$b^2 \Lambda^2 + a^2 M^2 = a^2 b^2.$$

Sie wird ausgeschnitten durch den Zylinder:

$$b^2 (Y_3 + Y_2)^2 - a^2 (Y_3 - Y_2)^2 - 4 a^2 b^2 Y_4^2 = 0$$
$$[b^2 y_2^2 + a^2 y_3^2 - a^2 b^2 (y_1 - 2 k y_4)^2 = 0].$$

Der Schnitt derselben mit der E^∞ $Y_4 = 0$ gibt das imaginäre Linienpaar:

$$[b (Y_3 + Y_2) + a (Y_3 - Y_2)] \cdot [b (Y_3 + Y_2) - a (Y_3 - Y_2)] = 0$$
$$[\text{oder: } (b y_2 + a i y_3) \cdot (b y_2 - a i y_3) = 0].$$

Der Schnitt mit $Y_1 = 0$, d. h. die Bildkurve des geodätischen Kegelschnittes wird dargestellt durch die Gleichung:

$$b^2 (\eta_3 + \eta_2)^2 - a^2 (\eta_3 - \eta_2)^2 - 4 a^2 b^2 \eta_1^2 = 0$$
$$[b^2 \zeta_2^2 + a^2 \zeta_3^2 - a^2 b^2 \zeta_1^2 = 0].$$

Die Bildkurve ist eben ein n. e. Kegelschnitt, doch können wir, wie wir schon bei der Bildkurve eines beliebigen Kreises zu erwähnen hatten, derselben keineswegs die metrischen Eigenschaften zuschreiben, die bei der Kurve auf der Fläche auftraten. Formal — d. h. wenn wir die Koordinaten ζ_i benutzen — sind die beiden Gleichungen dieselben:

$$\frac{\Lambda^2}{a^2} + \frac{M^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_1}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Aber die Maßbestimmungen der Grenzfläche und der Tangentialebene lassen sich in keiner Weise in Einklang bringen; ist doch die eine parabolisch, die andere hyperbolisch (vergl. § 7).

Projektiv können wir ja die „ideale“ Koordinatenseite $\eta_1 = 0$ ($\zeta_1 = 0$) und die Punkte O und O′ mit den Koordinaten

$$0:1:0\ \left[0:\frac{1}{2}:-\frac{i}{2}\right] \text{ und } 0:0:1\ \left[0:\frac{1}{2}:\frac{i}{2}\right]$$

einführen, aber diese Beziehungen geben uns nicht die wirklichen metrischen Verhältnisse der Tangentialebene, die immer auf den C_2^∞ zurückgehen müssen.

Die Brennpunkte:

So können wir analog der projektiven Definition derselben die Punktepaare der Kegelschnittschar, die von den Punkten O und O′ und dem gegebenen Kegelschnitt gebildet wird, bestimmen. Das werden aber keineswegs die Brennpunkte des Kegelschnittes in der üblichen metrischen Definition; ein n. e. Kegelschnitt kann gar keine Brennpunkte haben; denn die Kurve, die als der geometrische Ort der Punkte der n. e. Ebene definiert ist, deren Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten konstant ist, ist von höherer, von der vierten Ordnung.

Nehmen wir andererseits die projektiv-analoge Definition der Brennpunkte in die n. e. Ebene herüber und erklären die drei Punktepaare der Kegelschnittschar, die gebildet wird von dem gegebenen Kegelschnitt und dem C_2^∞, als Brennpunkte, so läßt sich hier im metrischen Falle wieder nachweisen, daß die physikalische (metrische) Definition nicht zutrifft.

Ebenso ist es mit den mechanischen Erzeugungsweisen der sogen. Kegelschnitte. Sie sind total verschieden von den projektiv erzeugten wirklichen Kegelschnitten.

Ein n. e. Mensch müßte die durch die bekannte Fadenkonstruktion[1]) erhaltene Kurve als Kurve vierter Ordnung in seinen projektiv definierten Koordinaten[2]) ansprechen.

Sein Ellipsenzirkel (d. h. euklidisch gesprochen) zeichnete eine C^4, während sein gewöhnlicher Zirkel einen Kreis auch im nicht-euklidischen Sinne beschreibt.

---

[1]) — die doch für sich unabhängig ist von aller Auffassung des Unendlich-Fernen —

[2]) Cl. L., pag. 455.

Auf diese Weise versteht man auch, wie man von einem Krümmungsmaß [1]) der n. e. Ebene sprechen kann. Die n. e. Ebene ist freilich nicht gekrümmt. Wenn wir aber z. B. eine sehr große Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes $\left(-\frac{1}{4\,k^2}\right)$ nehmen und auf ihr mit dem Zirkel eine Linie zeichnen, so bekommen wir zwar auch einen Kreis; machen wir jedoch die obenerwähnte Fadenkonstruktion, so erzeugen wir auf der Fläche eine C^4.

Ähnliche Betrachtungen wurden schon von Beltrami [2]) angestellt.

Doch nun wieder zur Grenzfläche.

Alle metrischen Beziehungen können hier zweifach definiert werden: auf der Fläche rein metrisch durch die Gleichungen in Λ und M, im Ebenenbündel mit Hilfe der imaginären Erzeugenden durch die Zylinder, also auf projektivem Wege, oder was dasselbe ist, auf der Fläche mit Zuhilfenahme der beiden unendlich-fernen imaginären Kreisrichtungen.

Wir kehren wieder zurück zu der Frage nach den Brennpunkten. Auf der Fläche gingen wir direkt von ihnen aus und bestimmten den geometrischen Ort.[3]) Im Ebenenbündel gehen wir aus von der Zylindergleichung und bringen diese in Beziehung zu den beiden imaginären Erzeugenden, indem wir von ihnen aus an den Zylinder die vier Tangentialebenen legen und die weiteren vier Schnittgeraden als Brennlinien bezeichnen. Diese Definition gilt aber nur in diesem ausgezeichneten Bündel im P^∞. Denn diese Tangentialebenen sind zugleich Tangentialebenen der F_2^∞ und nach Analogie [4]) von Entfernung zweier Punkte der Grenzfläche und Neigung zweier Strahlen des Bündels, sind diese Brennlinien gleichzeitig die Strahlen, zu denen alle Erzeugenden des Zylinders so liegen, daß die Summe der Winkel, die sie mit den beiden bilden, konstant ist.

[Wir haben hier den interessanten Fall, daß im Bündel die parabolische Maßbestimmung gilt, während der Schnitt hyperbolische

---

[1]) Cl. L., pag. 533 und Klein: Math. Anm. IV, pag. 595.

[2]) „Saggio di interpretazione della geometria nou-euclidea“ 1868. Giornale di Matem.

[3]) Es sind auch mit Hilfe genau derselben Mittel wie in der e. Geometrie sämtliche Eigenschaften von Tangente, Normale, Directrix etc. leicht nachzuweisen —.

[4]) Cl. L., pag. 504.

Maßbestimmung hat. Ähnlich gilt im euklidischen Büschel von Strahlen elliptische Maßbestimmung, während der Schnitt auf einer Geraden parabolische Maßbestimmung aufweist.]

Die reellen Schnittpunkte eben dieser Schnittgeraden mit der Grenzfläche sind die Punkte, von denen wir ausgingen: Die Brennpunkte der geodätischen Ellipse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{M^2}{b^2} = 1$$

mit den Koordinaten

$$+e, 0 \text{ und } -e, 0 \qquad r_1 + r_2 = 2a \qquad b = \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Beweis:

Die Zylindergleichung ist:

$$(Y_2 + Y_3)^2 b^2 - (Y_2 - Y_3)^2 a^2 - 4a^2 b^2 Y_4^2 = 0$$
$$[y_2^2 b^2 - y_3^2 a^2 - 4a^2 b^2 (y_1 - 2k y_4)^2 = 0].$$

Wir legen durch die imaginären Erzeugenden die Tangentialebenen an den Zylinder, bestimmen die Schnittgeraden und deren Durchstoßungspunkte mit der Grenzfläche.

Wir können aber, um dies zu erreichen, auch die Bildebene benützen: wir setzen dann an Stelle des Zylinders die Bildkurve, an Stelle der Erzeugenden in $Y_4 = 0$ ihre Bildpunkte O und O′ auf $\eta_1 = 0$ und an Stelle der Tangentialebenen die Tangenten. Wir bestimmen demnach die Punktepaare der Kegelschnittschar, welche gebildet wird von der Bildkurve und dem Punktepaar O und O′:

Die Gleichung der Schar in homogenen, projektiv definierten, Linienkoordinaten u_i ist:

$$u_1^2 + (u_2 - u_3)^2 b_2 - (u_2 + u_3)^2 a^2 + 2\nu u_2 u_3 = 0$$

ν_1 und ν_2 bestimmen wir aus der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 & -(b^2 + a^2) + \nu \\ 0 & -(b^2 + a^2) + \nu & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0$$

für $\nu_1 = 2a^2$ und $\nu_2 = 2b^2$. Die Gleichung hat außerdem noch eine Wurzel $\nu_3 = \infty$.

Die Punktepaare sind also:

$$\left(u_1 + (u_2 - u_3)\sqrt{a^2 - b^2}\right) \cdot \left(u_1 - (u_2 - u_3)\sqrt{a^2 - b^2}\right) = 0$$
$$\left(u_1 + (u_2 + u_3)\sqrt{a^2 - b^2}\right) \cdot \left(u_1 - (u_2 + u_3)\sqrt{a^2 - b^2}\right) = 0$$
$$u_2 \cdot u_3 = 0$$

d. h. in Punktkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 &= 1 : \quad e : -e \\
&= 1 : -e : +e \quad \Big\} \nu_1 \\
&= 1 : +e : +e \\
&= 1 : -e : -e \quad \Big\} \nu_2 \\
&= 0 : \quad 1 : \quad 0 \\
&= 0 : \quad 0 : \quad 1 \quad \Big\} \nu_3 .
\end{aligned}$$

Ihnen entsprechen die Punkte der Fläche:

$$\begin{aligned}
Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 &= \quad e^2 : \quad e : -e : 1 \\
&= \quad e^2 : -e : \quad e : 1 \\
&= -e^2 : \quad e : \quad e : 1 \\
&= -e^2 : -e : -e : 1 \\
&\left\{ \begin{array}{l} = \quad 1 : \quad 0 : \quad 0 : 0 \\ = \quad 1 : \quad 0 : \quad 0 : 0 \end{array} \right\};
\end{aligned}$$

bei dem letzten Punktepaar, welches auf der Linie $\eta_1 = 0$ liegt, ist die Abbildung nicht mehr eindeutig, da dieser ganzen Linie der eine P^∞ entspricht.

In Koordinaten Λ, M erhalten wir also die Punkte

$$0, -ei; \quad 0, +ei; \quad +e, 0; \quad -e, 0; \quad \infty, \infty; \quad \infty\,\infty.$$

Die reellen Punkte $+e, 0$ und $-e, 0$ sind die Brennpunkte, von denen wir ausgingen.

Die Asymptoten:

Diese Grenzkurven werden ausgeschnitten durch die Tangentialebenen, welche von der Axe (der Verbindungslinie des Mittelpunktes des C^2 auf der Fläche mit P^∞) aus an den Zylinder gehen:

$$\frac{\Lambda}{a} \pm \frac{iM}{b} = 0$$

sie sind also reell, wenn b imaginär (Analogon der Hyperbel).

Die geodätische Hyperbel geht mit zwei reellen, verschiedenen Ästen durch den P^∞, wo sie auch von den Asymptoten-Grenzkurven berührt wird.

Es treten eben an Stelle der reellen (imaginären) unendlichfernen Punkte eines e. Kegelschnittes auf der G^∞ die reellen (imaginären) Richtungen des geodätischen Kegelschnittes der Fläche durch den P^∞ [oder im Bündel reelle (imaginäre) Linienpaare in der $E^\infty : Y_4 = 0$].

d) Korrespondenz zwischen Bündel, Fläche und euklidischer Ebene:

E^∞	P^∞	G^∞
Strahl	Punkt	Punkt
zwei imag. Erzeugende in E^∞	zwei imag. Richtungen durch P^∞	zwei imaginäre Punkte auf G^∞
Ebene	Grenzkurve	Gerade
Zylinder:	geodät. Kegelschnitt:	Kegelschnitt:
1. durch die ausgez. Erzeugenden	1. (geodätischer) Kreis (i. K. R.)	1. Kreis (i. K. p.)
2. mit imaginären Erzeugenden	2. g. Ellipse (imagin. Richtungen)	2. Ellipse (imaginäre Punkte)
3. mit reellen Erzeugenden	3. g. Hyperbel (reelle Richtungen)	3. Hyperbel (reelle Punkte)
4. mit zusammenfallenden Erzeugenden in E^∞	4. g. Parabel (zusammenfallende Richtg.) durch P^∞	4. Parabel (zusammenfallende Punkte) auf G^∞.

§ 11.

Quadratische Funktionen.

Nachdem wir so auch die Gleichung zweiten Grades in Λ und M dargestellt und interpretiert haben, können wir an weitere Probleme der konformen Abbildung, die durch quadratische Funktionen vermittelt werden, also auch nicht mehr eindeutig sind, gehen.

z. B. a) $Z = z^2$

$$\mathfrak{L} = \Lambda^2 - M^2 \qquad \mathfrak{M} = 2\,\Lambda\,M\,.$$

Diese Abbildung macht uns weiter keine Schwierigkeiten, nachdem nun im vorigen Paragraphen die Gebilde zweiten Grades definiert sind. Es entsprechen den Axenparallelen der Z-Fläche

$$\mathfrak{L} = a \qquad \mathfrak{M} = b.$$

zwei Scharen von zu einander orthogonalen gleichseitigen geodätischen Hyperbeln der z-Fläche:

$$\Lambda^2 - M^2 = a \qquad 2\,\Lambda\,M = b.$$

Einem Werte Z entsprechen zwei Werte z: $z = \pm(\Lambda + i\,M)$. Die Beziehung ist eine ein-zwei-deutige: sowohl die positive wie die negative z-Halbfläche ist ein-ein-deutig auf die Z-Fläche bezogen.

In den Punkten 0 und ∞ ist die Konformität gestört, in ihnen verdoppeln sich entsprechende Winkel.

Es macht keine Schwierigkeit, auch hier eine zweiblättrige Riemannsche Fläche einzuführen mit den Verzweigungspunkten 0 und ∞. Diese ist einfach-zusammenhängend und eindeutig auf die Z-Fläche bezogen.

Die Axenparallelen der z-Fläche

$$\Lambda = a' \qquad M = b'$$

gehen über in die zwei Scharen von konfokalen Parabeln

$$\mathfrak{M}^2 = 4\,a'^2\,(\mathfrak{L} - a'^2)$$
$$\mathfrak{M}^2 = 4\,b'^2\,(\mathfrak{L} + b'^2),$$

welche zueinander orthogonal sind und den Nullpunkt zum gemeinsamen Brennpunkt haben.

b) $\quad Z = \frac{1}{2}\,(z + \frac{1}{z})$.

Diese rationale Funktion legt eine ein-zwei-deutige Beziehung zwischen den beiden Grenzflächen z und Z fest.

Einem Punkte Z entsprechen zwei Punkte z, welche zueinander in der Beziehung $z_1 = \frac{1}{z_2}$ stehen.

Man findet das bekannte Resultat:

Sowohl das Innere wie das Äußere des Einheitskreises in der z-Fläche ist ein-ein-deutig auf die Z-Fläche bezogen.

Die Punkte des Einheitskreises bilden eine Ausnahme.

Wir trennen Reelles und Imaginäres und führen in der z-Fläche Polarkoordinaten ein:

$$\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}\cos\varphi = r\cos\varphi \quad \text{also} \quad \mathfrak{L} = \frac{1}{2}\,(r + \frac{1}{r})\cos\varphi$$

$$M = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}\sin\varphi = r\sin\varphi \quad \text{also} \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2}\,(r + \frac{4}{r})\sin\varphi$$

Den Kurven $r =$ konst. (den konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt der Λ, M-Fläche) entsprechen in der Z-Fläche die konfokalen g. Ellipsen:

$$\frac{\mathfrak{L}^2}{\frac{1}{4}\,(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{\mathfrak{M}^2}{\frac{1}{4}\,(r - \frac{1}{r})^2} = 1$$

Brennpunkte: 1, 0 und -1, 0.

Den Kurven $\varphi =$ konst. (dem zugehörigen orthogonalen Grenzkurvenbüschel) entsprechen in der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$-Fläche die orthogonalen konfokalen Hyperbeln:

$$\frac{\mathfrak{L}^2}{\cos^2\varphi} - \frac{\mathfrak{M}^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

Brennpunkte ebenfalls: 1, 0 und -1, 0.

Der Einheitskreis geht über in die Strecke zwischen den Brennpunkten.

Man sieht, die Betrachtungen sind dieselben, wie sie sonst in der komplexen Ebene angestellt zu werden pflegen.

Die weitere Durchführung dieser und ähnlicher Beispiele bringt nichts Neues und wird daher übergangen.

§ 12.

Das allgemeine Problem der konformen Abbildung.

Wir müssen weiter untersuchen, wo geometrische Anschauung in der Funktionentheorie auftritt. Dies ist der Fall bei dem allgemeinen Problem der konformen Abbildung, welche geleistet wird von der Funktion

$$\mathfrak{L} + i\,\mathfrak{M} = Z = f(z) = f(\Lambda + i\,M).$$

Die analytische Formulierung dieser Bedingungen, unter welchen die Funktion $f(z)$ das Geforderte leistet, ist

$$\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\Lambda} = \frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,M} \qquad \frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,M} = -\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,\Lambda} \qquad 1)$$

also genau so wie in der komplexen Ebene. Der Beweis für die Konformität, der sich auf das rechtwinklige Koordinatensystem (§ 4) und die Ähnlichkeit entsprechender unendlich kleiner Dreiecke [§ 9, 1) β] stützt, ist genau so zu führen wie in der komplexen Ebene.

Jede Funktion der komplexen Variablen z erfüllt die Bedingungen 1) an einer regulären Stelle. Ihre Komponenten sind Integrale der bekannten Laplaceschen Differentialgleichung:

$$\Delta\,\mathfrak{L} = 0; \qquad \Delta\,\mathfrak{M} = 0.$$

Der Differential-Quotient jeder Funktion $f(z)$ nach z ist unabhängig von der Richtung, in welcher die Differentiation erfolgt. Sein absoluter Betrag gibt das Vergrößerungsverhältnis der Ähnlichkeit der Abbildung in den kleinsten Teilen, die $f(z)$ vermittelt, und seine Amplitude den Winkel α, um den das Bild der Z-Fläche gegen das der z-Fläche gedreht erscheint.

Die Konformität der Abbildung

$$\mathfrak{L} + i\,\mathfrak{M} = f(\Lambda + i\,M)$$

erleidet nur in den singulären Punkten der Funktion eine Störung.

Grenzen wir auf der z-Fläche einen Bereich ab, innerhalb dessen sich die Funktion an allen Stellen regulär verhält, so wird dieser Bereich durch die Funktion konform auf die Z-Fläche (resp. auf den entsprechenden Bereich) abgebildet.

§ 13.

Linien- und Flächen-Integrale und der Cauchysche Satz.

Wir betrachten weiter, welche geometrische Grundlagen zur Aufstellung des Integrales einer Funktion komplexen Argumentes als nötig erscheinen. — Es ist zu erwähnen, daß ein solches Integral rein analytisch definiert werden kann ohne geometrische Hilfsmittel. — Doch liegen wiederum den Begriffen: Kurven- oder Linienintegral und Flächenintegral wesentlich geometrische Anschauungen zu Grunde.

Begriffe wie: Integrationsweg und Bereich können wir ohne weiteres auf unsere Grenzfläche übertragen.

Nun sei φ eine Funktion von Λ, M; eindeutig und stetig in einem Bereiche mit stetigen Ableitungen nach den unabhängigen Variabeln. Man denke sich den Bereich in Flächenelemente $d\sigma$ zerlegt.

Bei unserer Wahl der Grenzfläche ($\mu = 4k^2$) ist $ds = d\Lambda$ und $ds' = dM$. Wenn wir also den Bereich B, in welchem φ definiert ist, durch Parallele zu den Axen in lauter unendlich kleine Flächenelemente $d\sigma$ zerlegen, so ist

$$d\sigma = d\Lambda\, dM$$

$$\int_B \varphi(\Lambda, M)\, d\sigma = \int\int_B \varphi(\Lambda, M)\, d\Lambda\, dM$$

Das über den Bereich B auszudehnende Flächenintegral ist definiert als das nebenstehende Doppelintegral nach den unabhängigen Variablen.

Auch die Einführung des Kurvenintegrales macht keine Schwierigkeiten; denn das Bogenelement irgend einer Kurve der Fläche ist allgemein

$$ds'' = \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2}$$

$$s'' = \int_{\Lambda''}^{\Lambda'} \sqrt{1 + \left(\frac{dM}{d\Lambda}\right)^2}\, d\Lambda.$$

Das Linienintegral ist definiert als der Grenzwert der Summe $\Sigma \varphi(\Lambda, M)\, ds$ für alle Werte φ und ds auf einer gegebenen Kurve von Punkt $\Lambda' M'$ zu $\Lambda'' M''$.

$$\int_{(C)} \varphi \, ds = \int_{\Lambda' M'}^{\Lambda'' M''} \varphi(\Lambda, M)\, ds$$

Diese Kurve C sei darstellbar in der Parameterform

$$\Lambda = f(\tau) \qquad M = g(\tau),$$

wobei f und g stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen sein müssen.

Das gewöhnliche bestimmte Integral, dem dann das Kurvenintegral gleich ist, lautet:

$$\int_{(C)} \varphi \, ds = \int_{\tau''}^{\tau'} \varphi\,[f(\tau), g(\tau)] \sqrt{[f'(\tau)]^2 + [g'(\tau)]^2}\; d\tau.$$

Auf dieser Grundlage können wir alle die Beziehungen zwischen Linien- und Flächen-Integralen reeller Funktionen zweier unabhängiger Variablen aufstellen (Greensche Sätze), für deren Interpretation die Grenzfläche genau so als geometrisches Hilfsmittel dienen kann wie die komplexe Ebene.

Haben wir nun eine Funktion $Z = f(z)$ zu integrieren von einem Werte z_0 zu z_1, so deuten wir uns diese Werte durch die Punkte mit den Koordinaten $\Lambda_0\, M_0$ und $\Lambda_1\, M_1$ und ziehen zwischen denselben irgend eine Kurve C auf der Fläche.

Wir definieren

$$\int_{z_0}^{z_1} Z\, dz = \int_{\Lambda_0 M_0}^{\Lambda_1 M_1} (\mathfrak{L}\, d\Lambda - \mathfrak{M}\, dM) + i \int_{\Lambda_0 M_0}^{\Lambda_1 M_1} (\mathfrak{M}\, d\Lambda + \mathfrak{L}\, dM).$$

Die beiden Integrale rechts sind Kurvenintegrale reeller Funktionen, wie wir sie oben definierten. Die Kurve C sei in Parameterform darstellbar und $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ genügen als Komponenten der Funktion $f(z)$ den Bedingungen (§ 12, 1):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M} \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial M} = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \Lambda}.$$

Diese sind aber identisch mit den Bedingungen, daß die Argumente obiger Integrale totale Differentiale sind.

Man sieht daraus im weiteren, daß der Wert des Integrales der $f(z)$ über eine geschlossene Kurve, die keinen singulären Punkt einschließt, Null ist.

Darauf beruht auch der Cauchysche Satz

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

wonach der Wert einer Funktion an jeder Stelle des inneren Bereiches bekannt ist, falls die Werte der Funktion auf dem Rande irgendwie gegeben sind.

Damit sind die Grundlagen der Cauchyschen Funktionentheorie in Bezug auf ihre geometrischen Hilfsmittel verfolgt. Als Resultat erhalten wir völlige Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Darstellung in der komplexen Ebene. Die Fortsetzung dieser Betrachtungen, wie sie in der Funktionentheorie üblich ist, beruht ganz auf den bis jetzt gegebenen Grundlagen. Die Potenz-Entwicklung, die Einführung des Konvergenzkreises, das Prinzip der analytischen Fortsetzung bedürfen, wenn überhaupt, so doch keiner anderen geometrischen Hilfsmittel als der bisher entwickelten.

Es können z. B. auch die neueren Probleme wie die konformen Abbildungen einer Halbebene auf die verschiedenen Arten von Kreisbogendreiecken auf der Grenzfläche interpretiert werden. Es ist also hiemit der Beweis erbracht für den Satz, von dem wir ausgingen:

„Wenn die hyperbolische Geometrie zu Grunde gelegt wird, so hat man auf der Grenzfläche eine geometrische Darstellung der komplexen Variablen zur Verfügung, welche den Anforderungen der Funktionentheorie und der projektivischen Geometrie gleichmäßig genügt.“

II. Teil.

Der Grenzraum.

§ 1.

Ableitung des Grenzraumes.

Alle Bewegungen im vierdimensionalen Raume sind durch diejenigen linearen Transformationen desselben gegeben, welche die Gesamtheit der unendlich-fernen Punkte, die in unserem Falle einen reellen, nicht von reellen Kegeln erzeugten Raum zweiter Ordnung (R_2^∞) erfüllen, in sich überführen. Es kann durch diese Transformationen jeder (lineare) Raum in jeden andern und jeder Punkt in jeden andern übergeführt werden; ein unendlich-ferner Punkt bleibt ein solcher.

Unter den „eigentlichen" Transformationen, die hier für uns in Betracht kommen, führt die folgende zum gewünschten Grenzraum.

Die Gleichung des R_2^∞ sei[1])

$$X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 = 0. \qquad 1)$$

Das homogene projektiv-definierte Koordinatensystem, gebildet von fünf linearen Räumen, ist so gewählt, daß

$$X_1 = 0 \; X_4 = 0, \quad X_2 = 0 \; X_3 = 0$$

Tangentialräume des R_2^∞ sind, also ihn in vier imaginären Kegeln schneiden.

a) Die Transformation, welche in diesem Fall den R_2^∞ in sich überführt, lautet:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \Xi_1 - \Lambda(\Xi_2 + \Xi_3) - \Lambda^2 \Xi_4 \\ X_2 &= \Xi_2 + \Lambda \Xi_4 \\ X_3 &= \Xi_3 + \Lambda \Xi_4 \\ X_4 &= \Xi_4 \\ X_5 &= \Xi_5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\text{I)} \\ &X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 = \\ &\Xi_1 \Xi_4 + \Xi_2 \Xi_3 + \Xi_5^2. \end{aligned}\right.$$

[1]) Cl. L., pag. 515.

Hierin setzen wir

$$X_1 = x_1 + i\,x_4 \qquad x_1 = \frac{X_1 + X_4}{2} \qquad 2)$$

$$X_4 = x_1 - i\,x_4 \qquad x_1 = \frac{X_1 - X_4}{2\,i}$$

$$X_2 = x_2 + i\,x_3 \qquad x_2 = \frac{X_2 + X_3}{2}$$

$$X_3 = x_2 - i\,x_3 \qquad x_3 = \frac{X_2 - X_3}{2\,i}$$

$$X_5 = x_5 \qquad x_5 = X_5$$

so daß die Gleichung 1) des R_2^{∞} wird [1])

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0. \qquad 1')$$

Die Transformationsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 &= \xi_1\,(2 - \Lambda^2) - 2\,\xi_2\,\Lambda + i\,\xi_4\,\Lambda^2 \qquad 1')\\ x_2 &= \xi_1\,\Lambda + \xi_2 - i\,\xi_4\,\Lambda\\ x_3 &= \xi_3\\ 2\,i\,x_4 &= -\xi_1\,\Lambda^2 - 2\,\xi_2\,\Lambda + i\,\xi_4\,(2 + \Lambda^2)\\ x_5 &= \xi_5 \end{aligned}$$

hieraus: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$.

Bestimmen wir nun die Elemente, welche bei dieser Bewegung festbleiben, so erhalten wir die Punkte der Ebene:

$$x_2 = 0 \quad x_1 - i\,x_4 = 0.$$

In sich übergeführt werden außer dem R_2^{∞} noch die lin. Räume des Büschels:

$$\lambda\,x_3 + \mu\,x_5 + \nu\,(x_1 - i\,x_4) = 0. \qquad 3)$$

Unter ihnen befindet sich auch der Raum $x_1 - i\,x_4 = 0$ $(X_4 = 0)$, der eine ausgezeichnete Stelle einnimmt.

Durch diese Transformationen werden also alle unendlich-fernen Flächen dieser Räume und alle ∞^2-Flächen zweiten Grades, welche durch den ausgezeichneten unendlich-fernen Punkt:

$$x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_1 - i\,x_4 = 0$$

in Richtung der Schnittlinie der drei Räume $x_3 = 0$ $x_5 = 0$ $x_1 - i\,x_4 = 0$ hindurchgehen, alle Grenzflächen also, die in diesen Räumen zu diesem unendlich-fernen Punkt gehören, in sich übergeführt.

Jeder Punkt eines dieser Räume bewegt sich also in einer bestimmten Richtung auf der Schnittgrenzkurve der ∞^1 Grenzflächen, welche ihn enthalten.

---

[1]) cf. F. Klein: „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie“ § 2. Math. Anm. V und Cl. L., pag. 514 (28).

Da nun sowohl der R_2^∞

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0 \quad (X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 = 0)$$

also auch der lin. Raum

$$x_1 - i x_4 = 0 \qquad (X_4 = 0)$$

in sich übergehen, so ist dies auch der Fall mit dem R_2-büschel:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \rho (x_1 - i x_4)^2 = 0 \\ &(X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 + \rho X_4^2 = 0). \end{aligned} \qquad 4)$$

Diese R_2, welche von dem Raumbüschel 3) in den erwähnten Grenzflächen geschnitten werden, nennen wir [1])

„Grenzräume".

Sie haben mit R_2^∞ den imaginären Kegel, in welchem dieser vom lin. Raum $x_1 - i x_4 = 0$ $(X_4 = 0)$ berührt wird, gemeinsam:

$$x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 \quad (X_2 X_3 + X_5^2 = 0). [2])$$

Ein solcher Raum entsteht aus einem Kugelraum, d. h. aus einem R_2 konstanter Krümmung oder: welcher den R_2^∞ längs einer doppelt zu zählenden Fläche zweiten Grades berührt, wenn der Mittelpunkt auf den R_2^∞ rückt, die Berührungs-F_2 also in einen imaginären Kegel ausartet.

§ 2.

Weitere Transformationen dieses R_2-büschels 4) in sich.

b) Wir führen durch eine zweite Bewegung, die durch folgende Transformationsgleichungen II) gegeben ist, den Punkt X_i nach Y_i über:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + i M (X_2 - X_3) - M^2 X_4 \\ Y_2 &= X_2 + i M X_4 \\ Y_3 &= X_3 - i M X_4 \\ Y_4 &= X_4 \\ Y_5 &= X_5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{II)} \\ &Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_5^2 = \\ &X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2. \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 2 y_1 &= x_1 (2 - M^2) - 2 M x_3 + i x_4 M^2 \qquad \text{II')} \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_1 M + x_3 - i x_4 M \\ 2 i y_4 &= -x_1 M^2 - 2 M x_3 + i x_4 (2 + M^2) \\ y_5 &= x_5 \end{aligned}$$

hieraus: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.

Bestimmt man die Punkte, welche bei dieser Bewegung festbleiben, so erhält man die Punkte der Ebene: $x_3 = 0$ $x_1 - i x_4 = 0$.

---

[1]) und [2]) Cl. L., pag. 515.

Dieselbe ist senkrecht zu der betreffenden Ebene in I'); denn $x_2 = 0$ ist zu $x_3 = 0$ konjugiert in Bezug auf R_2^∞; $x_1 - i x_4 = 0$ ist zu beiden konjugiert.

Alle ∞^2 Grenzflächen, welche bei der neuen Bewegung II) in sich übergehen, gehören zu einer Richtung, welche senkrecht ist zur Richtung I. Unter ihnen sind aber ∞^1 Grenzflächen, die auch zu I) gehören.

In sich übergeführt werden außer dem R_2^∞ noch die Räume des Büschels

$$\varkappa y_2 + \mu y_5 + \nu' (y_1 - 2k y_4) = 0. \qquad 3')$$

Jeder Punkt eines dieser Räume bewegt sich auf der Schnittgrenzkurve der ∞^1 Grenzflächen, welche ihn enthalten, in der durch die Schnittgerade der Räume

$$y_2 = 0 \quad y_5 = 0 \quad y_1 - 2k y_4 = 0$$

bestimmten Richtung.

Es wird also das Grenzraumbüschel 4)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_5^2 + \rho (x_1 - i x_4)^2 = 0$$

ebenfalls in sich übergeführt.

c) Wir führen schließlich durch eine dritte Bewegung, die durch die folgenden Transformationsgleichungen III) gegeben ist, den Punkt Y_i in Z_i über:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 - N^2 Y_4 - 2N Y_5 \\ Z_2 &= Y_2 \\ Z_3 &= Y_3 \\ Z_4 &= Y_4 \\ Z_5 &= N Y_4 + Y_5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_5^2 = \\ &Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_5^2 \end{aligned} \qquad \text{III)}$$

oder:

$$\begin{aligned} 2 z_1 &= y_1 (2 - N^2) + i y_4 N^2 - 2N y_5 \qquad \text{III')} \\ z_2 &= y_2 \\ z_3 &= y_3 \\ 2i z_4 &= -y_1 N^2 + i y_4 (2 + N^2) - 2N y_5 \\ z_5 &= y_1 N - i y_4 N + y_5 \end{aligned}$$

hieraus: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^3 + y_5^2$.

Fest bleiben bei dieser Bewegung die Punkte der Ebene: $z_5 = 0$, $z_1 - i z_4 = 0$, welche senkrecht steht zu den entsprechenden Ebenen in I) u. II).

In sich übergeführt werden außer dem R_2^∞ noch die Räume des Büschels

$$\varkappa z_2 + \lambda z_3 + \nu'' (z_1 - i z_4) = 0. \qquad 3'')$$

Jeder Punkt eines dieser Räume bewegt sich in bestimmter Richtung (senkrecht zu I und II) auf der Schnittgrenzkurve der ∞^1 ihn enthaltenden Grenzflächen.

Von den gesamten ∞^2 Grenzflächen, welche durch diese Bewegung in sich übergehen, waren ∞^1 schon unter der Schar I, ebenfalls ∞^1 unter II.

Es sind also durch die Bewegungen „Λ“, „M“, „N“ drei Scharen von orthogonalen Grenzkurven definiert.

d) Setzen wir nun diese drei Bewegungen zu einer einzigen zusammen, bestimmen also die Transformation, durch welche Punkt Ξ in Z_i übergeführt wird, so finden wir: IV)

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \Xi_1 - (\Lambda - i\,M)\,\Xi_2 - (\Lambda + i\,M)\,\Xi_3 - 2\,N\,\Xi_5 - (\Lambda^2 + M^2 + N^2)\,\Xi_4\\
Z_2 &= \Xi_2 + (\Lambda + i\,M)\,\Xi_4\\
Z_3 &= \Xi_3 + (\Lambda - i\,M)\,\Xi_4\\
Z_5 &= \Xi_5 + N\,\Xi_4\\
Z_4 &= \Xi_4
\end{aligned}$$

$$Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_5^2 = \Xi_1 \Xi_4 + \Xi_2 \Xi_3 + \Xi_5^2$$

oder: IV')

$$\begin{aligned}
2\,z_1 &= \xi_1(2 - \Lambda^2 - M^2 - N^2) - 2\,\Lambda\,\xi_2 - 2\,M\,\xi_3 - 2\,N\,\xi_5 + (\Lambda^2 + M^2 + N^2)\,i\,\xi_4\\
z_2 &= \xi_1\,\Lambda + \xi_2 - \Lambda\cdot i\,\xi_4\\
z_3 &= \xi_1\,M + \xi_3 - M\cdot i\,\xi_4\\
z_5 &= \xi_1\,N + \xi_5 - N\cdot i\,\xi_4\\
2\,i\,z_4 &= \xi_1(-\Lambda^2 - M^2 - N^2) - 2\,\Lambda\,\xi_2 - 2\,M\,\xi_3 - 2\,N\,\xi_5 + (2 + \Lambda^2 + M^2 + N^2)\,i\,\xi_4
\end{aligned}$$

hieraus: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$.

Fest bleiben bei dieser Bewegung die Punkte der Ebene $z_1 - i\,z_4 = 0$, $\Lambda\,z_2 + M\,z_3 + N\,z_5 = 0$, also eine durch Λ, M, N bestimmte Ebene des Bündels, das von den entsprechenden drei Ebenen in I, II, III gebildet wird.

In sich übergehen aus dem Raumbündel

$$\frac{\varkappa}{\Lambda}\,z_2 + \frac{\lambda}{M}\,z_3 + \frac{\mu}{N}\,z_5 + \nu'''\,(z_1 - i\,z_4) = 0 \qquad 3''')$$

diejenigen ∞^1 Räume, für welche $\varkappa + \lambda + \mu = 0$.

Ein Punkt eines solchen Raumes bewegt sich in bestimmter Richtung auf einer Grenzkurve, welche die ∞^1 Grenzflächen, welche durch den Punkt gehen, enthält.

Läßt man Λ M N beliebig variieren, so gelangt man inf. IV) zu allen ∞^3 Punkten des Grenzraumes und inf. 3''') zu allen ∞^3 Grenzflächen desselben.

Beide Mannigfaltigkeiten lassen sich auch zu ∞^4 Grenzkurven anordnen.

§ 3.

Das Koordinatensystem.

Unter diesen ∞^3 Grenzflächen sind drei besonders ausgezeichnet:

a) Bei der Bewegung I) die beiden, welche durch die Koordinatenräume $y_3 = 0$ $y_5 = 0$ aus unserem Grenzraum (ρ) ausgeschnitten werden:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 1)$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 2)$$

b) bei der Bewegung II) die Schnitte der Räume $y_2 = 0$ $y_5 = 0$:

$$y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 3)$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 2)$$

c) bei der Bewegung III) die Schnitte der Räume $y_2 = 0$ $y_3 = 0$:

$$y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 3)$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2 + \rho (y_1 - i y_4)^2 = 0 \qquad 1)$$

während überall der Schnitt des Raumes $y_1 - i y_4 = 0$ den i. Kegel:

$$y_2^2 + y_3^2 + y_5^2 = 0 \text{ liefert.}$$

Diese drei ausgezeichneten Grenzflächen, die also immer zwei Bewegungen angehören (wie auch alle zu ihnen parallele Grenzflächen), wählen wir zu Koordinatenflächen; denn sie stehen aufeinander senkrecht und liefern mit ihren Parallelflächen ein dreifachorthogonales Flächensystem. Drei aus ihrer Schar bestimmen im allgemeinen einen und nur einen Punkt. Außerdem treffen sie sich nur mehr im unendlich-fernen Punkt (P^∞): $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_5 = 0$ $x_1 - i x_4 = 0$.

Die wechselseitigen Schnittgrenzkurven bezeichnen wir als Koordinatenaxen.

Analog dem Verfahren bei der Grenzfläche (§ 4) werden wir

1. die Gleichung des Grenzraumes (ρ), den wir benützen,

2. die Koordinaten Ξ_i unseres beliebigen Anfangspunktes möglichst einfach annehmen.

ad 1. Die Gleichung des R_2^∞ war: $X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 = 0$
die Gleichung des Grenzraumes (ρ):

$$X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 + \rho X_4^2 = 0.$$

Durch die Substitution:

$Y_1 = X_1 + \rho X_4$ $Y_2 = X_2$ $Y_3 = X_3$ $Y_4 = X_4$ $Y_5 = X_5$

wird die Gleichung des Grenzraumes: $Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_5^2 = 0$
und die Gleichung des R_2^∞: $Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_5^2 - \rho Y_4^2 = 0$

ad 2. In diesem Koordinatensystem Y_i nehmen wir als den Punkt Ξ_i den Koordinateneckpunkt: $0:0:0:1:0\left(\frac{1}{2}:0:0:\frac{i}{2}:0\right)$.

Die Transformationsgleichungen werden dann folgende:

$$\rho Z_1 = -(\Lambda^2 + M^2 + N^2) \quad \text{oder:} \quad \sigma z_1 = \frac{1-(\Lambda^2+M^2+N^2)}{2} \qquad IV'')$$

$$\rho Z_2 = \Lambda + iM \qquad \sigma z_2 = \Lambda$$

$$\rho Z_3 = \Lambda - iM \qquad \sigma z_3 = M$$

$$\rho Z_4 = 1 \qquad \sigma z_4 = -\frac{1-(\Lambda^2+M^2+N^2)}{2i}$$

$$\rho Z_5 = N \qquad \sigma z_5 = N$$

$$Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_5^2 = 0 \qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\Lambda = \frac{Z_2+Z_3}{2Z_4} \quad \text{oder:} \quad \Lambda = \frac{z_2}{z_1 - iz_4}$$

$$M = \frac{Z_2-Z_3}{2iZ_4} \qquad M = \frac{z_3}{z_1-iz_4}$$

$$N = \frac{Z_5}{Z_4} \qquad N = \frac{z_5}{z_1-iz_4}$$

§ 4.

Die lineare Gleichung in Λ M N: die Grenzfläche.

Wir sehen also:

a) $\Lambda = 0$ bedeutet die Grenzfläche 3),[1]) welche der Raum $Z_2 + Z_3 = 0$ $(z_2 = 0)$ aus dem Grenzraum ausschneidet.

$M = 0$ stellt die Grenzfläche 1)[1]) dar, welche der Raum $Z_2 - Z_3 = 0$ $(z_3 = 0)$ ausschneidet und

$N = 0$ den Schnitt 2)[1]) des Raumes $Z_5 = 0$ $(z_5 = 0)$.

$\Lambda = 0$ $M = 0$ $N = 0$ sind also unsere oben eingeführten Koordinatenflächen.

b) $\Lambda = \text{konst.} = a$

$M = \text{konst.} = b$

$N = \text{konst.} = c$

sind die zu den Koordinatengrenzflächen parallelen Flächen und werden ausgeschnitten durch die Räume

$$Z_2 + Z_3 - 2aZ_4 = 0 \quad [z_2 - a(z_1 - iz_4) = 0]$$

$$Z_2 - Z_3 - 2ibZ_4 = 0 \quad [z_3 - b(z_1 - iz_4) = 0]$$

$$Z_5 - cZ_4 = 0 \quad [z_5 - c(z_1 - iz_4) = 0].$$

Auch diese gehören paarweise zu den Bewegungen I, II, III.

[1]) II, § 3.

c) $a\Lambda + bM = \text{konst.} = d$
$b'M + c'N = \text{konst.} = d'$
$c''N + a''\Lambda = \text{konst.} = d''$

sind die zu den Koordinatenaxen parallelen Grenzflächen und werden ausgeschnitten durch die Räume

$$a\frac{Z_2 + Z_3}{2} + b\frac{Z_2 - Z_3}{2i} - dZ_4 = 0 \qquad \text{(III)}$$
$$[az_2 + bz_3 - d(z_1 - iz_4) = 0]$$

$$b'\frac{Z_2 - Z_3}{2i} + c' \cdot Z_5 - d'Z_4 = 0) \qquad \text{(I)}$$
$$[b'z_3 + c'z_5 - d'(z_1 - iz_4) = 0]$$

$$c''Z_5 + a''\frac{Z_2 + Z_3}{2} - d''Z_4 = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$[c''z_5 + a''z_2 - d''(z_1 - iz_4) = 0]$$

Die entsprechenden Räume und Grenzflächen gehören zu I, II oder III, wobei immer ∞^1 Grenzflächen zwei Bewegungen zugleich angehören (cf. b).

Schließlich haben wir noch:

d) $a\Lambda + bM + cN = \text{konst.} = d.$

Diese Grenzfläche wird ausgeschnitten durch den Raum

$$a\frac{Z_2 + Z_3}{2} + b\frac{Z_2 - Z_3}{2i} + cZ_5 - dZ_4 = 0$$
$$[\text{oder } az_2 + bz_3 + cz_5 - d(z_1 - iz_4) = 0],$$

welcher der beliebigen Bewegung IV) angehört, [wobei die Bedingung (bei § 2) 3‴) durch die Gleichungen IV″ (§ 3) übergeht in

$$a\Lambda + bM + cN = d \ (= -\nu''')].$$

Variiert in allen diesen Fällen das konstante Glied, so bekommen wir die zugehörigen Parallelgrenzflächen, welche durch die Räume des betreffenden Büschels, das zum Träger die zugehörige Schnittebene des Raumes $(z_1 - iz_4)$ hat, ausgeschnitten wird.

Durch einen gegebenen Punkt Λ' M' N' geht nur eine Grenzfläche der Schar d), nämlich:

$$a\Lambda + bM + cN = a\Lambda' + bM' + cN' = \text{konst.}$$

Drei der Grenzflächen (b, c, d) schneiden sich im allgemeinen in einem und nur einem Punkt.

b) $\Lambda = a \quad M = b \quad N = c$

$$\rho Z_2 = (a + ib) \qquad \sigma z_2 = a$$
$$\rho Z_3 = (a - ib) \qquad \sigma z_3 = b$$
$$\rho Z_1 = 1 \qquad \sigma z_5 = c$$
$$\rho Z_5 = c \qquad \sigma(z_1 - iz_4) = 1$$

ρZ_1 bestimmt sich aus der Gleichung des Grenzraumes:

$$\sigma(z_1 + iz_4) = -(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\rho Z_1 + - \frac{Z_2 Z_3 + Z_5^2}{Z_4} \rho = -(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \sigma z_1 = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$\sigma z_4 = - \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2i}$$

ausgenommen ist hiebei der Fall $Z_4 = 0$ $(z_1 - iz_4 = 0)$.

Ihm entspricht $\Lambda = \infty \quad M = \infty \quad N = \infty$, also der ausgezeichnete unendlich-ferne Punkt P^∞ $[1 : 0 : 0 : 0 : 0 (\frac{1}{2} : 0 : 0 : -\frac{1}{2} : 0)]$.

Durch ihn gehen alle ∞^3 Grenzflächen.

c) $a\Lambda + bM = d; \quad b'M + c'N = d'; \quad c''N + a''\Lambda = d;$"

$$z_2 : z_3 : z_5 : \underline{(z_1 - iz_4)} = \begin{vmatrix} b & 0 & d \\ b' & c' & d' \\ 0 & c'' & d'' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a & 0 & d \\ 0 & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & d \\ 0 & b' & d' \\ a'' & 0 & d'' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b' & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix}$$

$\underline{(z_1 + iz_4)}$ wird aus der Flächengleichung bestimmt; daraus ergibt sich z_1 und z_4.

d) Nehmen wir schließlich noch drei Grenzflächen vom allgemeinen Typus

$a\Lambda + bM + cN = d; \quad a'\Lambda + b'M + c'N = d'; \quad a''\Lambda + b''M + c''N = d'';$ so läßt sich leicht der Schnittpunkt der Geraden mit dem Grenzraum bestimmen, welche den drei zugehörigen Räumen gemeinsam ist.

Andererseits ist wieder eine Grenzfläche durch drei allgemein gelegene Punkte bestimmt; sie geht noch durch P^∞. [Durch vier Punkte ist eine Kugel[1]) bestimmt.]

Zu c) gehören noch die Spezialfälle:

$$a\Lambda + bM = 0 \quad b'M + c'N = 0 \quad c''N + a''\Lambda = 0.$$

Diese Grenzflächen gehen durch eine der Koordinatenaxen z. B.: $a\Lambda + bM = 0$ durch die N-Axe.

Die Grenzfläche gehört dem Büschel an, das $\Lambda = 0$ und $M = 0$ miteinander bilden; analog die andern.

Zu d) gehört noch der Fall: $a\Lambda + bM + cN = 0$.

Diese Fläche ist in dem Bündel enthalten, das die Koordinatenflächen $\Lambda = 0 \quad M = 0 \quad N = 0$ bilden; sie geht also durch den Koordinatenanfangspunkt 0 0 0.

[1]) Cl. L., pag. 499 u. cf. I, § 8[3]).

Die Formen:

$$A\Lambda + BM + CN + D = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\Lambda}{a} + \frac{M}{b} + \frac{N}{c} = 1$$

stellen ebenfalls Grenzflächen dar.

§ 5.

Der Punkt und die Entfernung zweier Punkte (Bogenelement).

Wie schon erwähnt, schneiden sich drei Grenzflächen (b) $\Lambda = a$ $M = b$ $N = c$ in einem bestimmten Punkte, dessen Koordinaten wir als a, b, c bezeichnen. Jedes Wertetripel Λ M N bestimmt einen Punkt.

Ausgezeichnet sind die Punkte:

0 0 0 also der Anfangspunkt, den wir beliebig wählen können und

∞ ∞ ∞ als der P^{∞}, welcher der einzige Punkt des Grenzraumes ist, welcher bei einer Kollineation des vierdimensionalen Gesamtraumes ungeändert bleibt.

Haben wir zwei Punkte Λ' M' N', Λ'' M'' N'', so erhebt sich sofort die Frage nach ihrer Entfernung im Grenzraume.

Wir kommen auf folgendem Wege dazu, diese Frage zu beantworten.

Aus I § 5 entnehmen wir die Addierbarkeit der Parameter in einer bestimmten Richtung.

Betrachten wir ferner

1. eine unendlich-kleine Bewegung I, welche durch folgende Formeln gegeben wird (mit Vernachlässigung der unendlich-kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung):

$$\begin{aligned} dX_1 &= -d\Lambda\,(X_2 + X_3) \\ dX_2 &= d\Lambda\,X_4 \\ dX_3 &= d\Lambda\,X_4 \\ dX_4 &= 0 \\ dX_5 &= 0 \end{aligned}$$

Wir benützen aus demselben Grunde wie (§ 5) bei der Grenzfläche, den Grenzraum $\rho = 4k^2$. Dann wird nämlich das Linienelement in dieser Richtung unter Zugrundelegung folgender Gleichung des R_2^{∞}

$$\Omega x x = X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_5^2 = -4k^2 X_4^2$$

$$\Omega x\,dx = X_1\,dX_4 + X_4\,dX_1 + X_2\,dX_3 + X_3\,dX_2 + 2X_5\,dX_5 = 0$$

$$\Omega\,dx\,dx = dX_1\,dX_4 + dX_2\,dX_3 + (dX_5)^2 = X_4^2\,(d\Lambda)^2$$

gleich $ds' = d\Lambda$.

2. Das Linienelement in der zweiten Richtung ist analog $ds'' = dM$

3. Das Linienelement in der dritten Richtung ist analog $ds''' = dN$

Daraus, daß die Bewegungen I, II, III zueinander senkrecht geschahen, kann man schließen, daß sich das Bogenelement einer beliebigen Richtung aus den drei orthogonalen in gewohnter Weise zusammensetzt:

$$ds = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2} = \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2 + dN^2}.$$

Dies läßt sich aber auch direkt dadurch beweisen, daß wir eine infinitesimale Transformation (IV) aufstellen und das Bogenelement in dieser beliebigen Richtung bestimmen:

$$\begin{aligned}
d\Xi_1 &= -(d\Lambda - i\,dM)\,\Xi_2 - (d\Lambda + i\,dM)\,\Xi_3 - 2\,dN\,\Xi_5 \\
d\Xi_2 &= \quad (d\Lambda + i\,dM)\,\Xi_4 \\
d\Xi_3 &= \quad (d\Lambda - i\,dM)\,\Xi_4 \\
d\Xi_4 &= \quad 0 \\
d\Xi_5 &= \quad dN\,\Xi_4 \\
\Omega x\,x &= \Xi_1\Xi_4 + \Xi_2\Xi_3 + \Xi_5^2 = -4k^2\Xi_4^2 \\
\Omega x\,dx &= \Xi_1\,d\Xi_4 + \Xi_4\,d\Xi_1 + \Xi_2\,d\Xi_3 + \Xi_3\,d\Xi_2 + 2\Xi_5\,d\Xi_5 = 0 \\
\Omega dx\,dx &= d\Xi_1\,d\Xi_4 + d\Xi_2\,d\Xi_3 + (d\Xi_5)^2 = (d\Lambda^2 + dM^2 + dN^2)\,\Xi_4^2 \\
ds &= \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2 + dN^2}.
\end{aligned}$$

Das Bogenelement setzt sich also aus den drei Bogenelementen nach drei orthogonalen Richtungen ebenso zusammen wie im euklidischen Raum.

Um nun die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, verfahren wir ebenso wie auf der Grenzfläche (§ 5).

Das Bogenelement in beliebiger Richtung ist

$$ds = \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2 + dN^2}.$$

Bestimmen wir nun den Weg, den der Punkt Ξ_i zurücklegt, um mittels der Bewegung IV auf der Grenzkurve, die alle zugehörigen Grenzflächen enthalten, nach Z_i zu gelangen, so müssen wir dabei beachten, daß M und N hier lineare Funktionen von Λ sind.

Wir nehmen die Gleichungen der Grenzkurve durch Λ' M' N' und Λ'' M'' N'' als schon bekannt an (siehe später § 8):

$$\frac{\Lambda - \Lambda'}{\Lambda - \Lambda''} = \frac{M - M'}{M - M''} = \frac{N - N'}{N - N''}$$

$$dM = -\frac{M'' - M'}{\Lambda'' - \Lambda'}\,d\Lambda \quad \text{und} \quad dN = -\frac{N'' - N'}{\Lambda'' - \Lambda'}\,d\Lambda$$

also:

$$r = \int_{\Lambda'}^{\Lambda''} \sqrt{d\Lambda^2 + dM^2 + dN^2}$$

$$- \sqrt{(\Lambda' - \Lambda'')^2 + (M' - M'')^2 + (N' - N'')^2} \cdot \frac{1}{\Lambda'' - \Lambda'} \int_{\Lambda'}^{\Lambda''} d\Lambda$$

$$r = \sqrt{(\Lambda' - \Lambda'')^2 + (M' - M'')^2 + (N' - N'')^2}.$$

Die Entfernung r zweier Punkte des Grenzraumes drückt sich durch die Koordinaten $\Lambda\, M\, N$ genau so aus, wie in der euklidischen analytischen Geometrie des Raumes.

§ 6.

Die Kugel und die stereographische Projektion des Grenzraumes.

Von dem Begriffe der Entfernung kommt man sehr einfach zu dem geometrischen Orte der Punkte, welche im Grenzraum von einem gegebenen Punkte konstante Entfernung besitzen, zur (geodätischen) Kugel des Grenzraumes.

Als Mittelpunkt nehmen wir den Punkt 0 0 0. Die Gleichung ist dann:

$$\Lambda^2 + M^2 + N^2 = r^2. \qquad 1)$$

Diese Fläche wird ausgeschnitten aus dem Grenzraum durch den R_2

$$Z_2 Z_3 + Z_5^2 - r^2 Z_4^2 = 0 \quad [z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 - r^2 (z_1 - i z_4)^2 = 0]. \quad 2)$$

Dieser R_2 geht durch den P^∞ und hat dort mit dem R_2^∞ den imaginären Kegel: $Z_2 Z_3 + Z_5^2 = 0$ $(z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 = 0)$ gemeinsam, in welchem beide R_2 von dem idealen Koordinatenraum $Z_4 = 0$ $(z_1 - i z_4 = 0)$ berührt werden.

Wir werden Raum 2) einen zylindrischen Raum nennen, wie aus dem Folgenden noch klarer werden wird.

Zur Klarlegung dieser Verhältnisse in projektivem Sinne, d. h. der Beziehungen zwischen dem Raumbündel des P^∞, den Zylinderräumen und dem Grenzraum durch P^∞, empfiehlt sich,[1]) die Abbildung des Grenzraumes durch Projektion desselben von P^∞ $(1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ aus auf den Tangentialraum $Z_1 = 0$ $(z_1 + i z_4 = 0)$ des Nullpunktes unseres Koordinatensystems 0 0 0 $(0 : 0 : 0 : 1 : 0)$.

NB.! In dem Tangentialraum herrscht die hyperbolische Maßbestimmung.

[1]) cf. I, § 8.

Setzen wir fest, daß das Koordinatentetraeder des Bildraumes ausgeschnitten wird von den Koordinatenräumen

$Z_2 = 0 \;\; Z_3 = 0 \;\; Z_5 = 0 \;\; Z_4 = 0 \;\; (z_2 = 0 \;\; z_3 = 0 \;\; z_4 = 0 \;\; z_1 - i z_4 = 0)$,

so wird diese Abbildung vermittelt durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \rho Z_2 &= \eta_2 & \varkappa Z_1 &= -(\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2) \\ \rho Z_3 &= \eta_3 & \varkappa Z_2 &= \eta_1 \eta_2 \\ \rho Z_5 &= \eta_5 & \varkappa Z_3 &= \eta_1 \eta_3 \\ \rho Z_4 &= \eta_1 & \varkappa Z_5 &= \eta_1 \eta_5 \\ & & \varkappa Z_4 &= \eta_1^2 \end{aligned}$$

$$Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_5^2 = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} \rho' z_2 &= \zeta_2 & \varkappa' z_2 &= \zeta_1 \zeta_2 = \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} \eta_1 \\ \rho' z_3 &= \zeta_3 & \varkappa' z_3 &= \zeta_1 \zeta_3 = \frac{\eta_2 - \eta_3}{2i} \eta_1 \\ \rho' z_5 &= \zeta_5 & \varkappa' z_5 &= \zeta_1 \zeta_5 = \eta_5 \;\; \eta_1 \\ \rho'(z_1 - i z_4) &= \zeta_1 & \varkappa'(z_1 - i z_4) &= \zeta_1^2 = \eta_1^2 \end{aligned}$$

$$\varkappa'(z_1 + i z_4) = -(\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2) = -(\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2)$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0.$$

Die Abbildung ist eindeutig mit Ausnahme des P^∞ $Z_4 = 0$ $(z_1 - i z_4 = 0)$, welchem die ganze „ideale" Koordinatenebene $\eta_1 = 0$ $(\zeta_1 = 0)$ entspricht.

Der durch diesen Punkt gehende imaginäre Kegel hat zum Bilde in dieser Ebene den imaginären Kegelschnitt

$$\eta_1 = 0 \;\; \eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 = 0 \;\; (\zeta_1 = 0 \;\; \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 = 0),$$

welcher projektivisch mit dem imaginären Kugelkreis verglichen werden kann.

Das Bild unserer Fläche:

$$\Lambda^2 + M^2 + N^2 = r^2, \qquad 1)$$

welche ausgeschnitten wird von dem Zylinderraum

$$Z_2 Z_3 + Z_5^2 - r^2 Z_4^2 = 0 \;\; [z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 - r^2 (z_1 - i z_4)^2 = 0], \qquad 2)$$

wird also

$$\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 - r^2 \eta_1^2 = 0 \;\; (\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 - r^2 \zeta_1^2 = 0). \qquad 3)$$

Um diese Gleichung diskutieren zu können, müssen wir die Gleichung der unendlich-fernen Fläche des Bildraums aufstellen, indem wir diesen mit dem R_2^∞ zum Schnitt bringen:

$$\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 - 4 k^2 \eta_1^2 = 0 \;\; (\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 - 4 k^2 \zeta_1^2 = 0)^1). \qquad 4)$$

[1]) cf. Cl. L., pag. 496 (1).

Wir sehen also, daß die Gleichungen 3) u. 4) Flächen desselben Büschels darstellen, die sich in dem obenerwähnten imaginären Kegelschnitt der Ebene $\eta_1 = 0$ berühren.

Diese Berührungsebene $\eta_1^2 = 0$, als F_2 doppelt gezählt, und der imaginäre Tangentialkegel $\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 = 0$ vom Koordinateneckpunkt $\eta_2 = 0 \quad \eta_3 = 0 \quad \eta_5 = 0$ (Kugelmittelpunkt) aus, der allen Flächen des Büschels gemeinsam ist und diese längs des erwähnten i. Kegelschnittes berührt, sind die Grundelemente des Büschels, zu dem die F_2^∞ und die in Diskussion stehende Bildfläche gehören.

Letztere ist also nach der allgemeinen Definition eine n. e. Kugel. Die Spitze des imaginären Tangentialkegels ist der Mittelpunkt, zugleich der gemeinsame Pol der Ebene $\eta_1 = 0$ in Bezug auf die Flächen des Büschels.

Soweit ist die Analogie mit den Verhältnissen des imaginären Kugelkreises und der E^∞ des euklidischen Raumes vollständig; sie gilt aber nur für die zu 3) konzentrischen Kugeln, d. h. für das Flächenbüschel

$$\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 - \lambda \eta_1^2 = 0 \quad [\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 - \lambda \zeta_1^2 = 0].$$

Es gibt in diesem Tangentialraum noch andere Kugeln, welche nicht in diesem, sondern in einem andern imaginären C_2 die F_2^∞ berühren; derselbe liegt in einer andern Ebene, kommt also für uns jetzt nicht in Betracht.

Nach der Theorie der stereographischen Abbildung von Räumen zweiten Grades bestimmt sich aus der Gleichung der Bildfläche durch Wiedereinsetzen der Raumkoordinaten in den entsprechenden Verbindungen das Gebilde, welches die gegebene Fläche aus dem R_2 ausschneidet.

Demnach erhalten wir aus

$$\eta_2 \eta_3 + \eta_5^2 - r^2 \eta_1^2 = 0 \qquad 3)$$

den linearen Raum:

$$Z_1 + r^2 Z_4 = 0, \qquad 5)$$

welcher parallel ist zum Bildraum, d. h. welcher dem Büschel $Z_1 + \lambda Z_4 = 0$ angehört. Die Gleichung

$$\Lambda^2 + M^2 + N^2 = r^2 \qquad 1)$$

stellt eine Kugel dar; denn der Zylinderraum

$$Z_2 Z_3 + Z_5^2 - r^2 Z_4^2 = 0$$

ist ein sogenannter Kugelzylinderraum, welcher auf einer Kugel als Basis steht und senkrecht zu dem Raume derselben ist. Jeder Raum

des obigen Büschels (5) schneidet aus ihm eine Kugel aus, d. h. eine F_2, welche mit der F_2^∞ ihres Raumes einen imaginären Berührungskegelschnitt gemeinsam hat.

Zum vollständigen Schnitt des Zylinderraumes mit dem Grenzraum gehört außer dieser Kugel noch der unendlich-ferne Kegel durch den P^∞ im Raum $Z_4 = 0$. Denn zwei Räume zweiten Grades schneiden sich in einer F_4, welche hier in Kugel und imaginären Kegel zerfällt.

Wir können auch sagen: dadurch, daß der Zylinderraum den imaginären Kegel enthält, ist er als Kugelzylinderraum charakterisiert.

Die F_2^∞ des Bildraumes wird ebenfalls durch einen solchen (den „absoluten") Kugelzylinderraum projiziert. Das Zylinderraumbüschel, das die beiden konstituieren, schneidet aus dem Grenzraum die ∞^1 konzentrischen Kugeln aus, die alle in Parallelräumen zum Bildraum liegen.

$r^2 = 0$ gibt uns den imaginären Kegel des Anfangspunktes (Nullkugel des Mittelpunktes § 7 II) in $Z_1 = 0$,

$r^2 = \infty$ gibt uns den unendlich-fernen imaginären Kegel des P^∞ in $Z_4 = 0$.

Wir können weiter behaupten:

Jeder „ebene" Schnitt des Grenzraumes ist eine Kugel.

[Der Grenzraum verhält sich wie ein Kugelraum mit unendlichfernem Mittelpunkt. (cf. Bemerkung II § 1 am Schluß).]

Denn 1. ist der Punkt, von dem wir ausgingen, nicht ausgezeichnet;

2. ändert sich mit dem Punkte nur der Bildraum und dessen F_2^∞, nicht aber der unendlich-ferne imaginäre Kegel. In jedem Tangentialraum (Bildraum) gibt es einen solchen imaginären Kegelschnitt $\eta'_2\,\eta'_3 + \eta'^2_5 = 0$; $\eta'_1 = 0$, welcher für die konzentrischen Kugeln des nun betrachteten Tangentialpunktes dieselbe Bedeutung hat, wieder imaginäre Kugelkreis des euklidischen Raumes allgemein.

Die Abbildung ist im Tangentialpunkte konform. Denn die ∞^2 Grenzflächen durch den Nullpunkt haben zu Bildflächen die zugehörigen Tangentialebenen.

Je weiter wir uns aber von ihm entfernen, um so mehr wird der Unterschied merkbar; denn der Tangentialraum ist, nach Riemann, ein Raum konstanter, negativer Krümmung ($-\frac{1}{4k^2}$, wenn wir mit k die n. e. Entfernungskonstante bezeichnen), während wir dem Grenzraum ebenso wie dem euklidischen Raum die Krümmung Null

zuschreiben müssen. (Wir verweisen noch auf eine spätere Bemerkung über diese Verhältnisse § 9 a, b, c.)

Die Interpretation der allgemeinen Kugelgleichung ist nach dem Vorhergehenden sofort erledigt.

Wir bringen durch eine Koordinatentransformation die Gleichung

$$(\Lambda - a)^2 + (M - b)^2 + (N - c)^2 = r^2 \qquad 6)$$

auf die schon betrachtete Form

$$\Lambda^2 + \overline{M}^2 + \overline{N}^2 = r^2.$$

Dazu ist noch zu bemerken, daß die Bildfläche dieser Kugel in $Z_1 = 0$ in diesem Falle keine Kugel, sondern eine n. e. F_2 ist, welche die F_2^∞ außer in dem imaginären Kegelschnitt in einem weiteren reellen oder imaginären Kegelschnitt trifft.

6) wird ausgeschnitten durch den Zylinderraum:

$$[z_2 - a(z_1 - i z_4)]^2 + [z_3 - b(z_1 - i z_4)]^2 + [z_5 - c(z_1 - i z_4)]^2 - r^2 (z_1 - i z_4)^2 = 0, \qquad 7)$$

dessen Schnitt mit $z_1 - i z_4 = 0$ den Kegel

$$z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 = 0$$

ergibt.

In dem Bildraum haben wir den imaginären Kegelschnitt

$$\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 = 0 \text{ in } \zeta_1 = 0.$$

Der andere Kegelschnitt liegt in der Chordalebene:

$$2a\zeta_2 + 2b\zeta_3 + 2c\zeta_5 - (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 + 4k^2)\zeta_1 = 0.$$

Wählen wir aber den Tangentialraum des Punktes a, b, c zum Bildraum (was der obigen Koordinatentransformation gleichkommt), so sind dort die Verhältnisse genau so wie in $Z_1 = 0$.

§ 7.

Metrik im Grenzraum und der Minimalkegel: Winkel zweier Ebenen.

Die Ausführungen in I § 7 können ohne weiteres auch auf den Grenzraum entsprechend angewendet werden.

Wir betrachten zu diesem Zweck den vorhin kurz erwähnten Fall der Kugelgleichung:

$$\Lambda^2 + M^2 + N^2 = 0, \qquad 1)$$

welche ausgeschnitten wird durch den Kegel

$$z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 = 0. \qquad 2)$$

Die Projektion desselben gibt im Raum $z_1 + i z_4 = 0$ den sogenannten „absoluten“ imaginären Kegel

$$\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 = 0, \qquad 3)$$

welcher die Ebene $\zeta_1 = 0$ in dem ausgezeichneten imaginären Kegelschnitt trifft.

Er ist also der imaginäre Tangentialkegel, der allen zu dem Anfangspunkt gehörigen konzentrischen Kugeln des Bildraumes gemeinsam ist.

$z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 = 0$ hat mit dem Grenzraum lediglich diesen reellen Punkt gemein; denn der

$$\Lambda^2 + M^2 + N^2 = 0$$

aus dem Grenzraume ausschneidende Projektionsraum ergibt sich als $z_1 + i z_4 = 0$, also als der Tangentialraum.

Der Kegel $\Lambda^2 + M^2 + N^2 = 0$

ist bis auf seine Spitze $\Lambda = 0\ M = 0\ N = 0$ durchaus imaginär. Er fällt zusammen mit seiner Bildfläche.

Von jedem Punkt a, b, c geht ein solcher Minimalkegel:

$$(\Lambda - a)^2 + (M - b)^2 + (N - c)^2 = 0 \qquad \text{aus.}$$

Wir können uns den Grenzraum aus solchen Kegeln entstanden denken.

Auf diesen „Minimalkegel“ können wir die Definition des Winkels zweier Grenzflächen gründen.

Wir definieren ihn als das Produkt der n. e. konstanten $(\pm)\frac{i}{2} = i k'$ in den Logarithmus des Doppelverhältnisses der Tangentialebenen der beiden gegeben Flächen zu den Tangentialebenen an den Kegel in einem Punkte derselben (oder was dasselbe ist, an den unendlichfernen Kegel; denn alle Minimalkegel gehen in der Richtung desselben durch den P^∞).

Z. B. Den Winkel der Grenzflächen

$$a\Lambda + bM + cN = 0 \quad \text{und} \quad N = 0$$

zu bestimmen.

Anstatt (wie analog I § 6) den Winkel der Räume zu bestimmen, welche diese beiden Grenzflächen ausschneiden, bestimmen wir den Winkel der Bildeben im Raume $z_1 + i z_4 = 0$, was mit dem obigen identisch ist[1]):

Ebene $a\zeta_2 + b\zeta_3 + c\zeta_5 = 0$ mit $\zeta_5 = 0$.

Der absolute Kegel ist $\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 = 0$.

[1]) cf. Cl. L., pag. 191 ff.

In Ebenenkoordinaten haben wir die Ebenen:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = a \quad u_3 = b \quad u_5 = c$$
$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 0 \quad v_5 = 1$$

und den Kegel

$$u_1 = 0 \quad u_2^2 + u_3^2 + u_5^2 = 0.$$

Es wird also

$$\varphi = \frac{i}{2} \log \frac{c - i\sqrt{a^2 + b^2}}{c + i\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{i}{2} \log \frac{c + i\sqrt{a^2 + b^2}}{c - i\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \left(\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}}\right).$$

Das ist aber die gewöhnliche Form des Winkels zweier Ebenen des euklidischen Raumes in dem speziellen Falle

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = 0; \quad \alpha', \ \beta', \ \gamma'$$
$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$
$$= \cos \gamma' \ (- \cos \varphi).$$

Analog sind die Winkel der gegebenen Grenzfläche

$$a\Lambda + bM + cN = 0$$

gegen die anderen Koordinatengrenzflächen

$$\cos \alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos \beta' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos \gamma' = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

so daß wir ihre Gleichung auch in der Hesse'schen Normalform schreiben können

$$\Lambda \cos \alpha' + M \cos \beta' + N \cos \gamma' = 0 \text{ (allgemein } \ldots - p = 0).$$

Im übrigen beweist man ebenso, wie in der euklidischen Geometrie, daß z. B. der Winkel zweier Grenzflächen

$$a' \Lambda + b' M + c' N + d' = 0$$
$$a'' \Lambda + b'' M + c'' N + d'' = 0$$

sich darstellt als

$$\cos \varepsilon = \frac{a'a'' + b'b'' + c'c''}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}}.$$

§ 8.

Die Gerade.

Von den Betrachtungen des vorigen § 7 kommt man sehr einfach auf die Gleichungen der Grenzkurve, welche der Geraden des e. Raumes ganz analog ist.[1])

[1]) Cl. L. I (12).

Sie ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte, kann aber auch als Schnittlinie zweier Grenzflächen definiert werden, für deren Punkte auch die erste Definition gilt; denn die Grenzflächen sind geodätische Flächen des Raumes.

Wir wählen als solche:

$$(\Lambda - \Lambda_0)\cos\beta = (M - M_0)\cos\alpha \qquad 1)$$

$$(\Lambda - \Lambda_0)\cos\gamma = (N - N_0)\cos\alpha \qquad 2)$$

Man kann nämlich durch geeignete Wahl der Größen

$$\Lambda_0,\ M_0,\ N_0,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

(welch letztere immer der Bedingung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ genügen müssen) noch auf ∞^1fache Weise (d. h. durch sämtliche Flächen des Büschels 1) 2) jede beliebige Grenzkurve (∞^4) als Schnitt erhalten; es geht noch dazu die Grenzfläche

$$(M - M_0)\cos\gamma = (N - N_0)\cos\beta \qquad 3)$$

durch die Grenzkurve.

Die Richtung der Kurve ist

$$\cos\lambda = \pm\cos\alpha$$
$$\cos\mu = \pm\cos\beta$$
$$\cos\nu = \pm\cos\gamma$$

und ihre Gleichungen sind

$$\frac{\Lambda - \Lambda_0}{\cos\alpha} = \frac{M - M_0}{\cos\beta} = \frac{N - N_0}{\cos\gamma}.$$

Daraus folgt in gewöhnlicher Weise die Parameterdarstellung

$$\Lambda = \Lambda_0 + r\cos\alpha;\quad M = M_0 + r\cos\beta;\quad N = N_0 + r\cos\gamma,$$

$$\text{wobei } r = \sqrt{(\Lambda - \Lambda_0)^2 + (M - M_0)^2 + (N - N_0)^2}$$

und die Gleichungen der Grenzkurve durch zwei Punkte

$$\frac{\Lambda - \Lambda_0}{\Lambda - \Lambda_1} = \frac{M - M_0}{M - M_1} = \frac{N - N_0}{N - N_1}.$$

Es können so alle Fundamentalaufgaben der analytischen Geometrie des Raumes behandelt werden, wenn man das Resultat nur im Auge hat; die Ableitung geschieht auf einem andern Wege, wie dies im vorhergehenden ausgeführt wurde.

§ 9.

Die Flächen zweiten Grades.

a) Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Λ, M und N.

Dieselbe lautet:

$$\Lambda^2 + 2a\,\Lambda M + b\,M^2 + 2c\,\Lambda N + 2d\,M N + e\,N^2 + 2f\,\Lambda + 2g\,M + 2h\,N + k = 0. \qquad 1)$$

Diese geodätische Fläche zweiten Grades wird aus dem Grenzraum durch folgenden R_2 ausgeschnitten:

$$z_2^2 + 2a z_2 z_3 + b z_3^2 + 2c z_2 z_5 + 2d z_3 z_5 + e z_5^2 + \quad 2)$$
$$2f z_2(z_1 - i z_4) + 2g z_3(z_1 - i z_4) + 2h z_5(z_1 - i z_4) + k(z_1 - i z_4)^2 = 0.$$

Die Fläche 1) ist also eine Fläche vierter Ordnung.

Raum 2) wird von dem Raum $z_1 - i z_4 = 0$ in folgendem Kegel geschnitten:

$$z_2^2 + 2a z_2 z_3 + b z_3^2 + 2c z_2 z_5 + 2d z_3 z_5 + e z_5^2 = 0 \quad 3)$$

2) ist also ein allgemeiner Zylinderraum.

Es können nun alle die Fälle auftreten, die in der e. Geometrie charakterisiert werden nach dem Verhalten der Fläche zum imaginären Kugelkreis in der unendlich-fernen Ebene.

Wir werden die Flächen einteilen nach ihrem Verhalten zum unendlich-fernen imaginären Kegel.

Wir nehmen dazu unsere Abbildung zu Hilfe und charakterisieren die Bildflächen in ihrem Verhalten zu dem imaginären Kegelschnitt in der Ebene $\zeta_1 = 0$, wobei die Gleichungen der einzelnen gegebenen Flächen in der bekannten Normalform vorausgesetzt werden, so daß sie zum Nullpunkt in Beziehung stehen.

Eine Koordinatentransformation bedingt auch eine andere Wahl des Bildraumes; nur so können wir dann (wie in I § 10) die projektiven Eigenschaften der Bildflächen zu metrischen der gegebenen Flächen umdeuten.

b) Beispiel des g. Ellipsoids.

$$\frac{\Lambda^2}{a^2} + \frac{M^2}{b^2} + \frac{N^2}{c^2} = 1 \quad 1)$$

Der projizierende Raum hat die Gleichung:

$$b^2 c^2 z_2^2 + c^2 a^2 z_3^2 + a^2 b^2 z_5^2 - a^2 b^2 c^2 (z_1 - i z_4)^2 = 0 \quad 2)$$

Die Bildfläche ist:

$$b^2 c^2 \zeta_2^2 + c^2 a^2 \zeta_3^2 + a^2 b^2 \zeta_5^2 - a^2 b^2 c^2 \zeta_1^2 = 0 \quad 3)$$

Der Schnitt mit $\zeta_1 = 0$ gibt den imaginären Kegelschnitt:

$$b^2 c^2 \zeta_2^2 + c^2 a^2 \zeta_3^2 + a^2 b^2 \zeta_5^2 = 0 \quad 4)$$

während

$$\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_5^2 = 0 \quad 5)$$

der ausgezeichnete imaginäre Kegelschnitt ist.

Die beiden Kegelschnitte sind auf dasselbe Polardreieck bezogen. Die Ecken und Seiten desselben stehen in dem oben erwähnten Zusammenhang mit den Hauptaxen und Hauptgrenzflächen des geodätischen Ellipsoides im Grenzraum.

Raum 2) wird also vom Raum $z_1 - iz_4 = 0$ in dem imaginären Kegel

$$b^2 c^2 z_2^2 + c^2 a^2 z_3^2 + a^2 b^2 z_5^2 = 0 \qquad 6)$$

geschnitten, der mit dem „absoluten" Kegel

$$z_2^2 + z_3^2 + z_5^2 = 0 \qquad 7)$$

vier konjugiert imaginäre Erzeugende gemein hat.

Das geodätische Ellipsoid hat also mit dem unendlich-fernen Kegel 4) konjugiert imaginäre Richtungen gemein.

Wie in I § 10 2) muß auch hier folgendes noch erwähnt werden: Wenn auch die Gleichungen 1) und 3) in Λ M N und

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \quad \frac{\zeta_3}{\zeta_1} \quad \frac{\zeta_5}{\zeta_1}$$

formal die gleichen sind, so dürfen wir nicht der Bildfläche 3) dieselben metrischen Eigenschaften zuschreiben, wie der geodätischen Fläche 1). Denn die Maßbestimmungen in den beiden Räumen sind verschieden: im Grenzraum parabolisch, im Tangentialraum hyperbolisch.

c) Die Fokalkurven und das konfokale System.

1. Wir können analog der projektiven Definition der Fokalkurven die Kegelschnitte der von 3) und 5) gebildeten Schar von F_2 bestimmen; diese sind aber nicht die Fokallinien. Denn eine n. e. F_2 besitzt keine Fokallinien.

Die den e. F_2 physikalisch entsprechenden n. e. Flächen sind vom vierten Grad. Denn alle Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen müssen Kurven ergeben, die der euklidischen (physikalischen oder metrischen) Ellipse (Hyperbel, Parabel) entsprechen, also (nach I § 10_3) C^4.

2. Die projektiv-analoge Definition der Fokallinien als (vier) Kegelschnitte der Schar, die eine gegebene F_2 mit der F_2^∞ bildet, ist nicht im Einklang mit der metrischen Definition.

Projizieren wir dagegen das erste Flächensystem auf den Grenzraum, so bekommen wir dort das konfokale System von dreifach-orthogonalen geodätischen Flächen zweiten Grades:

$$\frac{\Lambda^2}{a^2 + \lambda} + \frac{M^2}{b^2 + \lambda} + \frac{N^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

analog wie im euklidischen Raum, doch nur für das System mit dem Mittelpunkt 0, 0, 0. Auf diese Weise können wir alle Formen der quadratischen Gleichung in Λ M N durchgehen. Mit Ausnahme der Kugel erhalten wir Flächen höheren als zweiten Grades.

d) Korrespondenz zwischen Bündel, Grenzraum und euklidischem Raum:

R^∞	P^∞	E^∞
Strahl	Punkt	Punkt
Ebene	Grenzkurve	Gerade
e. Raum	Grenzfläche	Ebene
imaginärer Kegel in R^∞	∞^1 imaginäre Richtg. durch P^∞ = u. f. imagin. Kegel	imaginärer Kugelkreis in E^∞
u. f. imaginäres Linienpaar in jedem lin. Raum durch P^∞ als Schnitt mit dem imaginären Kegel in R^∞	2 u. f. imag. Richtg. auf jeder Grenzfläche im R^∞ aus den ∞^1 Richtg. durch P^∞	2. u. f. imag. Kreisp. in jeder Ebene in E^∞ als Schnitt mit imagin. Kugelkreis in E^∞
Zylinder-Räume	geod. Flächen 2. Grad.	F_2
1) durch den ausgez. Kegel	1) mit den ausgez. Richtungen	1) durch den Kugelkreis
2) mit imag. Kegel	2) mit imag. Richtg.	2) mit imag. C_2^∞
etc.	etc.	etc.

Schluß.

So sehen wir, daß im hyperbolischen Raume von vier Dimensionen ein dreidimensionales Gebilde existiert mit parabolischer Maßbestimmung.

Dasselbe zeigt weitgehende Analogien mit dem dreidimensionalen euklidischen Raum. Nur in Bezug auf das Unendlich-Ferne tritt eine dualistische Umkehr der Analogien ein, indem, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, an Stelle der unendlich-fernen Ebene ein unendlich-ferner Punkt, an Stelle des imaginären Kugelkreises, auf den sich alle Metrik des euklidischen Raumes gründet, der unendlich-ferne Kegel tritt.

Auf diesen können wir in unserem Grenzraum dessen Metrik aufbauen, indem wir z. B. als (geod.) Kugel die Fläche definieren, welche von einem R_2 ausgeschnitten wird, der den Grenzraum in diesem Kegel berührt.

Dieser Unterschied in der Auffassung des Unendlich-Fernen war uns auch bei der Grenzfläche (I. Teil) begegnet und veranlaßte uns, diesen Umstand zu einer willkommenen Deutung der komplexen Zahl, wie sie in der Funktionentheorie gebraucht wird, zu benützen.

Die Grenzfläche lieferte die geometrische Grundlage zu einer Deutung der funktionentheoretischen Prozesse.

In gleicher Weise könnten wir unseren Grenzraum benützen für Probleme der Potentialtheorie, die auch das Unendlich-Ferne des Raumes als einen Punkt annimmt.

VITA.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 15. August 1885 als Sohn der Schreinermeisterseheleute Johannes und Katharina Böhm zu Harburg (Bez.-A. Donauwörth) geboren.

Nach Augsburg übergesiedelt, besuchte er das humanistische Gymnasium St. Anna, an welcher Anstalt er auch 1904 absolvierte. Daraufhin widmete er sich hauptsächlich dem Studium der mathematischen Wissenschaften an der Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München.

Hier besuchte er die Vorlesungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten: Anding, v. Baeyer, Cornelius, Doehlemann, Goebel, Goldschmidt, Graetz, Hertwig, Kroyer, Lindemann, Lipps, Pauly, v. d. Pfordten, Röntgen, Sieper, Sommerfeld, Voß, v. Weber.